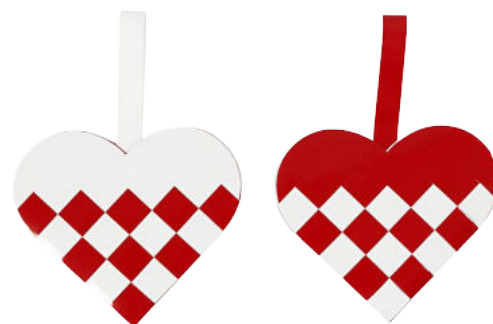


Falske julehjerter

Jeg troede, at alle var enige om, hvordan et dansk julehjerter ser ud, men nej. På nettet kan man finde disse julehjerter (vist til højre), som endda bliver markedsført som "A classic Danish Christmas Craft Decoration".



Et klassisk flettet julehjerter ser ud, som vist til venstre.



Opgave 1

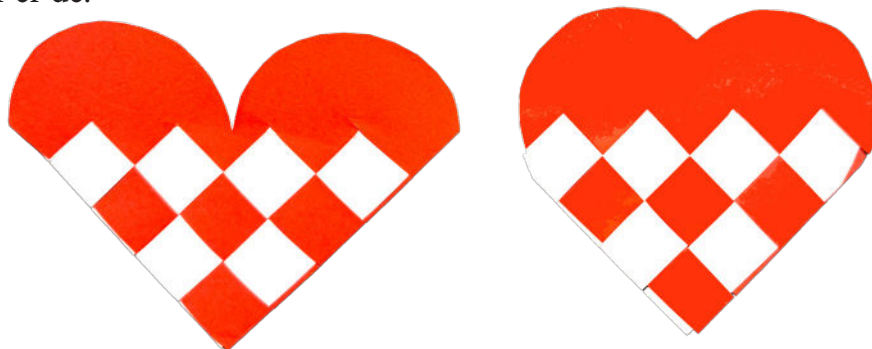
Hvad i alverden er dette falske julehjerter for noget?

Hvordan skal det klippes?

Hvordan skal det flettes?

Er der nogle begrænsninger?

Mit ældste barnebarn Iben og jeg kastede os ud i opgaven. Hun er heldigvis meget selvstændig, så hun mente helt klart, hun havde styr på det – og ville en anden vej end mig. Vi lavede hver vores hjerte. Her er de:



Jeg måtte indrømme, at Ibens hjerte (til højre) ligner billedet noget mere, end mit hjerte gør. Vi gik nu i gang med at se på forskellene på vore hjerte, og på at få præciseret det særlige ved de falske julehjerter, hvor jeg tilføjer det krav, at alle felter skal være hele kvadrater. På de oprindelige falske julehjerter er de yderste felter afrundede.

Så en anden, lidt mere afgrænset, opgave er på næste side.

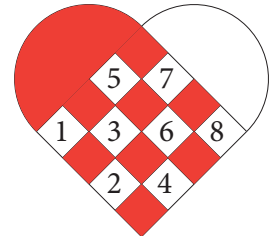
Opgave 2

- A) Hvad er forskellene mellem det klassiske julehjerte og det falske julehjerte?
B) Hvad er forskellene mellem Ibens og mit julehjerte?

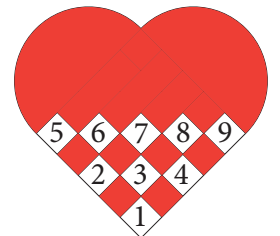
Efter selv at have tegnet og klippet en del, dukkede der andre matematiske undersøgelser frem. Men, som Erik bemærkede, så er de ikke nødvendige for at flette hverken de klassiske eller de falske julehjerter; det er bare sjov matematik.

Opgave 3

I det klassiske flettede julehjerte er der 8 hvide felter.



I det falske julehjerte med to røde halvcirkler er der 9 hvide felter.



A) Hvilke antal hvide felter kan man egentlig få frem i hhv det klassiske julehjerte og det falske julehjerte (hvor halvcirklerne er røde)?

B) Hvilke antal hvide felter går igen i de klassiske julehjerter og de falske julehjerter?

Til de sidste to undersøgelser kan det være en god ide blot at flette med den ene halvdel, så det ser rigtigt ud, men ikke bliver en kurv. Denne udgave kalder vi den kongevenlige udgave, inspireret af Kong Frederiks noget ubehjælpssomme udgave af et flettet julehjerte, som han præsterede sidste år i Den Gamle By:



Udvalgte løsninger

På sidste side er der skabeloner, som man direkte kan klippe efter.

Opgave 2A

Der kan siges meget om **det falske julehjerter**, fx:

- Det er anderledes end det klassiske ved, at begge halvcirkler har samme farve.
 - Der er ikke et kvadrat med flettet mønster, der er nærmere en trekant.
 - Det minder mere om et flettet kræmmerhus, med de muligheder og begrænsninger, de giver.
- Læs evt mere om flettede kræmmerhuse på pindogbjerre.dk/kraemmerhuse/



Opgave 2B

Den væsentligste **forskel på Ibens og mit hjerte** er at mine halvcirkler er på linje med hinanden, hvorimod Ibens to halvcirkler danner en ret vinkel. Når man ser på skabelonen, så har Iben ret.



Opgave 3A

Antallet af hvide felter i et klassisk julehjerter er enten halvdelen af et kvadrattal, hvis kvadrattallet er lige, eller halvdelen af et kvadrattal $\pm 0,5$, hvis kvadrattallet er ulige.

I et hjerte med 4 bånd i hver halvdel bliver der $4^2 = 16$ felter og $16/2 = 8$ hvide felter.

I et hjerte med 3 bånd i hver halvdel, bliver der $3^2 = 9$ felter. Man kan flette det på to måder, så der enten bliver $9/2 - 0,5 = 4$ eller $9/2 + 0,5 = 5$ hvide felter.

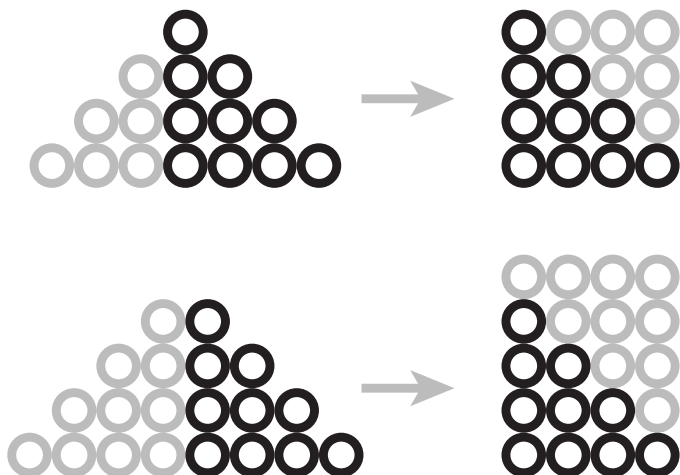
Antallet af hvide felter i et falsk julehjerter (hvor halvcirklerne er røde) er enten $1 + 3 + 5 + \dots$, dvs summen af de ulige tal op til et eller andet. Eller $2 + 4 + 6 + \dots$, dvs summen af de lige tal op til et eller andet.

Disse to summer har smukke formler:

Summen af de n første ulige tal er n^2 .

Summen af de n første lige tal er $n \cdot (n + 1) = n^2 + n$.

Man kan overbevise sig selv om disse formler geometrisk:



Man kan også se på det algebraisk:

Det n 'te ulige tal kan skrives som $2n - 1$. Fx er det 5'te ulige tal 9 da $2 \cdot 5 - 1 = 9$.

Summen af de første n ulige tal kan skrives: $1 + 3 + \dots + (2n - 1)$. Fx er summen af de første 5 ulige tal $1 + 3 + 5 + 7 + 9$.

Lægger vi første og sidste led sammen får vi $1 + (2n - 1) = 2n$.

Lægger vi andet og andet sidste led sammen får vi også $2n$, da $3 + (2n - 3) = 2n$.

Og sådan kan man blive ved med at parre leddene.

Er der et lige antal led, bliver der $n/2$ par og summen er da $n/2 \cdot 2n = n^2$.

Er der et ulige antal led bliver der $(n - 1)/2$ led. Tallet i midten, der ikke har en partner, er n , og summen er da $(n - 1)/2 \cdot 2n + n = n^2$.

Summen af de første n lige tal kan skrives: $2 + 4 + \dots + 2n$.

Hvis vi lægger første og sidste led sammen får vi $2 + 2n = 2(n + 1)$.

Lægger vi andet og andet sidste led sammen får vi også $2(n + 1)$, da $4 + (2n - 2) = 2n + 2 = 2(n + 1)$.

Og sådan kan man blive ved med at parre leddene.

Er der et lige antal led, bliver der $n/2$ par, og summen er da $n/2 \cdot 2(n + 1) = n \cdot (n + 1) = n^2 + n$.

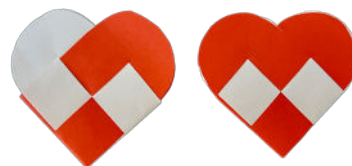
Er der et ulige antal led bliver der $(n - 1)/2$ led. Tallet i midten, der ikke har en partner, er $n + 1$, og summen er da $(n - 1)/2 \cdot 2(n + 1) + n + 1 = n^2 + n$.

Opgave 3B

Der er nogle, men ikke mange tal, der går igen i antallet af hvide felter i hhv det klassiske og det falske julehjerter.

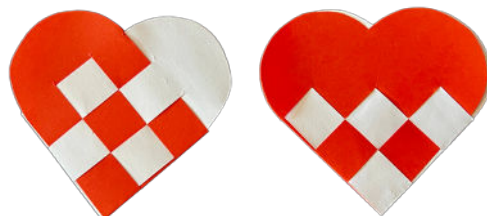
Her er et par interessante:

2 hvide felter kan skabes i både det klassiske og det falske:

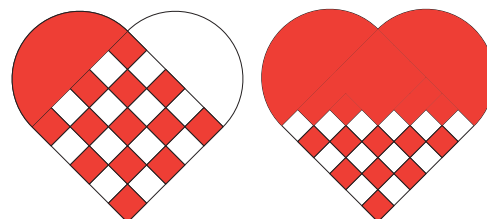


4 hvide felter kan også skabes i både det klassiske og det falske:

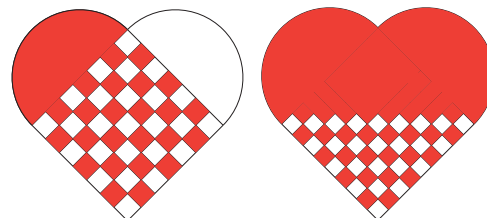
I disse to tilfælde gælder det, at hvis det klassiske og det falske hjerte har samme størrelse, da har de hvide felter også samme størrelse.

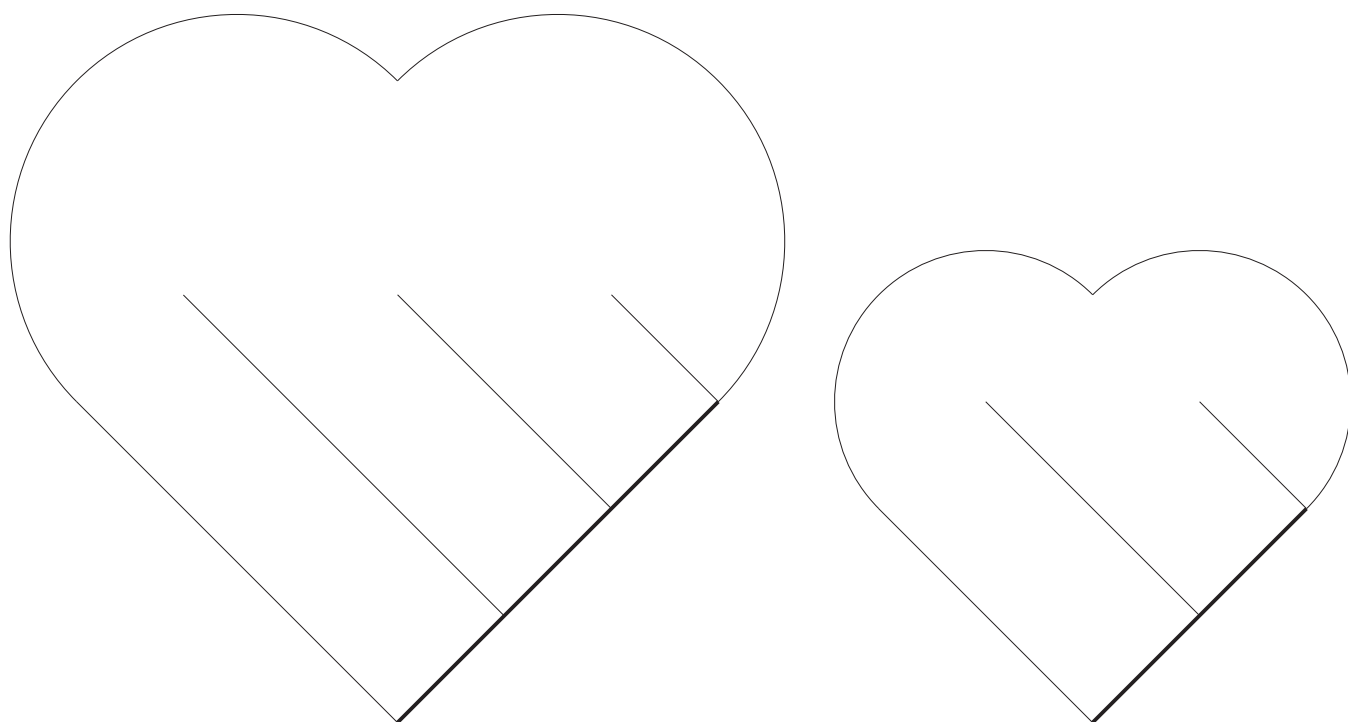
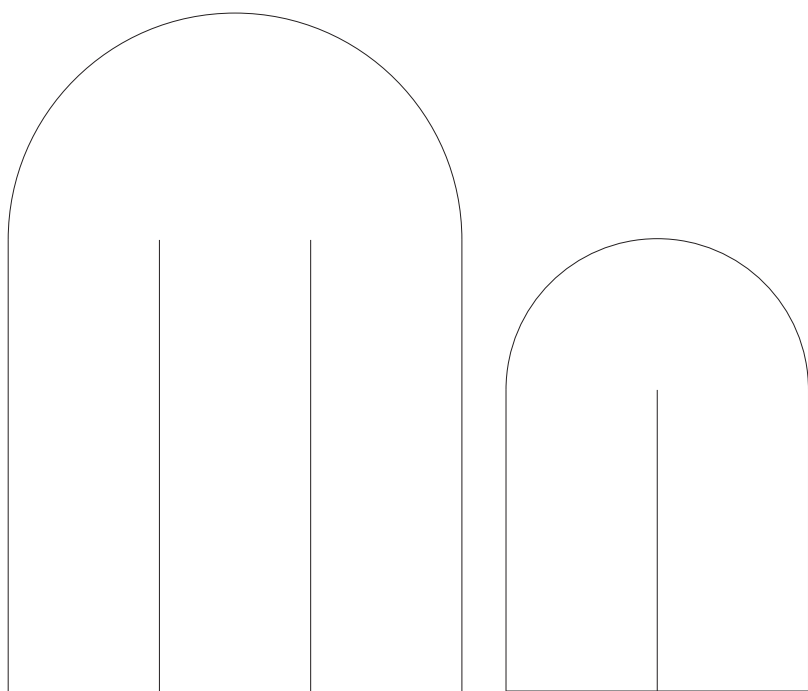


Efter 4 hvide felter, er 12 hvide felter er det næste antal, der kan skabes i både det klassiske og det falske hjerte.



Og herefter er 25 hvide felter er det næste antal.





Den tykke linje viser en foldelinje, dvs papiret er dobbelt og foldet langs den kant. Det kan være en god ide at klippe lidt længere op i halvcirklerne. Det gør det nemmere, når der skal flettes.

Der skal laves to af hver skabelon, en hvid og en rød udgave (eller de to farver man måtte ønske).

Hvis man laver den kongevenlige udgave, skal man kun have ét lag papir, og ingenting foldes.