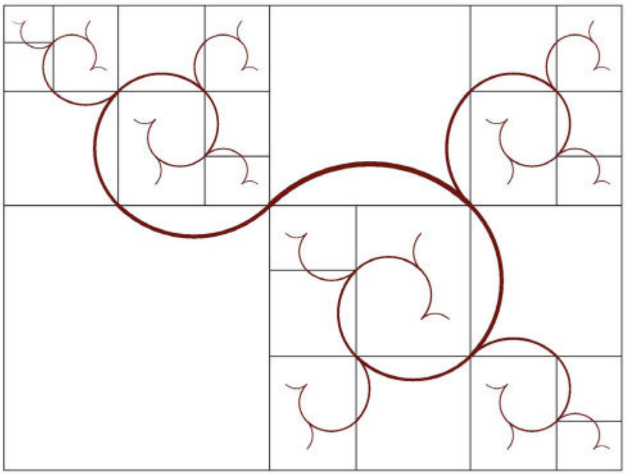
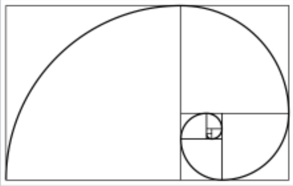
Harriss-spiral



Vi var på besøg hos gamle venner i Ithaca, New York: Jim og Beverly West. Beverly har været ansat på matematisk institut på Cornell Universitet i næsten 50 år. Jim er det stadig, i en alder af 80.
Beverly har altid noget matematik vi skal snakke om. Denne gang var det blandt andet om Edmund Harriss, som er både matematiker, forfatter og kunstner. Han har blandt andet opfundet Harriss-spiralen, som er inspireret af Den Gyldne Spiral[1].
Ved begge spiraler kan man blive ved med at tegne videre, baseret på enkle matematiske principper.

Det viste sig desværre, at Harriss-spiralen er besværlig at tegne. Man skal hele tiden bruge rektangler med det irriterende irrationale forhold rho: ρ=1,324717 …

ρ kaldes for Plastik-forholdet. Tre størrelser $a > b > c > 0$ er i et plastik-forhold når $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a} = \frac{b}{c}$.
Med $\frac{a}{b} = \rho$ kan ovenstående ligning omskrives til ligningen $\rho^3 - \rho - 1 = 0$ som altså har løsningen ovenfor ρ =1,324717 …[2]



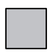
En Fibonacci-spiral approksimerer den gyldne spiral ved brug af kvarte cirkelbuer i kvadrater med en sidelængde svarende til Fibonacci-tal, her vist for kvadratstørrelserne 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21og 34.

Den Gyldne Spiral kan approximeres af Fibonacci-spiralen, som fx beskrevet på Wikipedia[3]. Så mon ikke også Harriss-spiralen kan approximeres af noget heltalligt?
Jo, Wildstrom beskriver i en artiken en variant af Harriss-spiralen[4].
I stedet for Fibonacci-talfølgen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 … hvor næste tal er summen af de to forudgående, bruger han Padovan-talfølgen: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16… hvor det næste tal er summen af de to tal ét skridt længere tilbage.

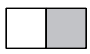
Forholdet mellem to på hinanden følgende tal nærmer sig i Fibonacci-talfølgen Det Gyldne Forhold phi: φ=1,618033…
Og i Padovan-talfølgen nærmer forholdet sig Plastik-forholdet rho: ρ =1,324717…

Og nu er vi klar til at gå igang med at tegne.

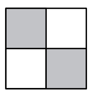
Tegning af en Padovan-spiral
Princippet er at tegne rektangel med længde og bredde givet ved to på hinanden følgende Padovan-tal. Del nu dette rektangel op i et nyt Padovan-rektangel og et kvadrat og endnu et Padovan-rektangel. Det er en god ide at farve kvadraterne undervejs. Fortsæt på denne måde med alle Padovan-rektangler, der bliver dannet, indtil der kun er kvadrater. Nogle kvadrater er de kvadrater algoritmen ovenfor skaber, de andre kvadrater, der er til sidst, (der alle er $1 \cdot 1$ kvadrater), er i virkeligheden rektangler, der tilfældigvis er kvadrater, derfor skal de ikke farves.



Hvis man bruger elektroniske hjælpemidler, er det nemmere at starte omvendt. Man starter med at tegne $1 \cdot 1$, og farver det gråt.



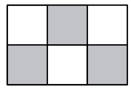
Så tegner man det næste Padovan-rektangel på $1 \cdot 2$. Deler det op med et Padovan-rektangel (her på $1 \cdot 1$) til venstre og et kvadrat. Kvadratet farves gråt.



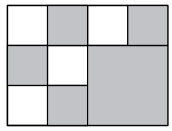
Så tegner man det næste Padovan-rektangel på $2 \cdot 2$. Deler det op med et Padovan-rektangel (her på $1 \cdot 2$) til venstre, et kvadrat nederst til højre (som farves gråt) og et Padovan-rektangel (her på $1 \cdot 1$) ovenover. Padovan-rektanglet på $1 \cdot 2$ drejes 90° mod uret før det sættes ind.

1 Læs evt. mere om den gyldne spiral på wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral
2 $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a} = \frac{b}{c}$. Når $\frac{a}{b} = \rho$ er $a = b \cdot \rho$. Når $\frac{b}{c} = \rho$ er $b = c \cdot \rho$.
Indsættes b i ligningen for a, får man $a = c \cdot \rho^2$. Dette indsættes nu i $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$: $\rho = \frac{\rho \cdot c + c}{\rho^2 \cdot c} = \frac{\rho+1}{\rho^2}$ som kan omskrives til $\rho^3 - \rho - 1 = 0$.
3 https://da.wikipedia.org/wiki/Den_gyldne_spiral
4 https://archive.bridgesmathart.org/2023/bridges2023-493.pdf

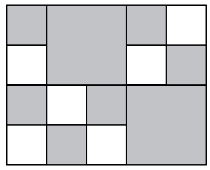
Det næste Padovan-rektangel er på 2 · 3. Det deles op med et Padovan-rektangel (her på 2 · 2) til venstre, et kvadrat nederst til højre (som farves gråt) og et Padovan-rektangel (her på 1 · 1) ovenover.
Padovan-rektanglet på 2 · 2 drejes 90° mod uret før det sættes ind.



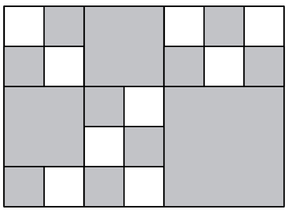
Det efterfølgende Padovan-rektangel er på 3 · 4. Det deles op med et Padovan-rektangel (her på 2 · 3) til venstre, et kvadrat nederst til højre (her på 2 · 2 som farves gråt) og et Padovan-rektangel (her på 1 · 2) ovenover.
Padovan-rektanglet på 2 · 3 drejes 90° mod uret før det sættes ind. Padovan-rektanglet på 1 · 2 sættes ind som det er.

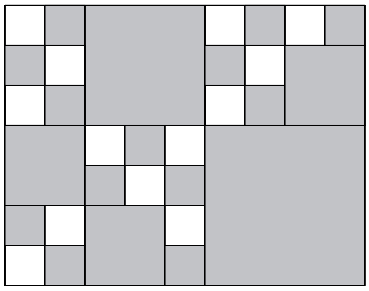


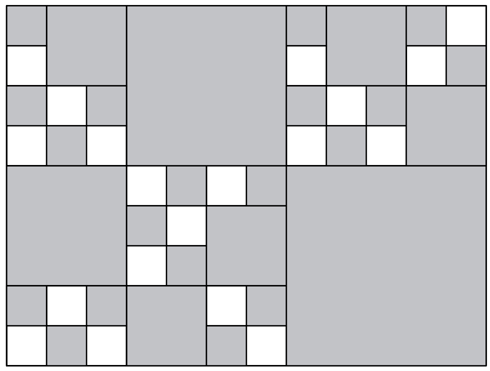
Det næste Padovan-rektangel er på 4 · 5. Det deles op med et Padovan-rektangel (her på 3 · 4) til venstre, et kvadrat nederst til højre (igen på 2 · 2 som farves gråt) og et Padovan-rektangel (her på 2 · 2) ovenover.
Padovan-rektanglet på 3 · 4 drejes 90° mod uret før det sættes ind. Padovan-rektanglet på 2 · 2 sættes ind som det er.



Og sådan kan man blive ved:



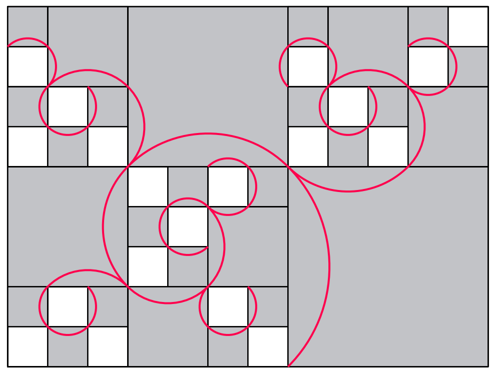




Når man har lavet et tilstrækkeligt stort Padovan-rektangel, skal spiralen tegnes. Den tegnes som kvartcirkler gennem alle de farvede kvadrater, og kvartcirklerne "gaber" over stykker af længder i Padovan-talfølgen.

Jeg har valgt, at mine spiraler alle ender i en 1-1-1 spiral, i det omfang det er muligt indenfor det store rektangel.

Padovan-spiralen er altså en heltallig tilnærmelse til Harriss-spiralen. Den er nu også ret flot.



Padovan-spiraler kan tegnes i hånden på kvadreret papir og med brug af passer.
Hvis man foretrækker at tegne elektronisk, vil jeg anbefale det lille, nemme onlineprogram:
https://virtual-graph-paper.com/

God fornøjelse.

Harriss-spiral - opgaver

Opgave 1

Fibonacci-talfølgen er tallene 1, 1, 2, 3, 5, 8 … hvor man får det næste ved at lægge det sidste og det andet sidste tal sammen, fx er det næste tal 8 + 5 = 13.

Padovan-talfølgen er tallene 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12 … hvor man får det næste tal ved at lægge det andet sidste og det tredje sidste tal sammen, fx er det næste tal 9 + 7 = 16.

	A	B	C
1	Fibonacci		Padovan
2	1		1
3	1		1
4			1
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Lav et regneark der udregner både Fibonacci talfølgen og Padovan talfølgen.

1. Hvilken formel skal der stå i cellerne A4 og C5?
2. Hvad er Fibonacci-tal nr 50?
3. Hvad er Padovan-tal nr 50?

Opgave 2

Undersøg forholdet mellem to efterfølgende tal i både Fibonacci-talfølgen og Padovan-talfølgen. Forhold betyder et tal divideret med et andet tal.
I kan fx i regnearket lave kolonner ved siden af, der beregner disse forhold.

	A	B	C	D
1	Fibonacci	forhold	Padovan	forhold
2	1		1	
3	1		1	
4			1	
5				
6				

1. Lav formler i cellerne B3 og D3.

Forholdene ser ud til at nærme sig to bestemte tal.
For Fibonacci talfølgen kaldes dette forhold for Det Gyldne Forhold, og skrives med det græske bogstav phi φ.
For Padovan talfølgen kaldes dette forhold for Plastik-forholdet, og skrives med det græske bogstav rho ρ.

2. Find de to tal, som forholdene nærmer sig til. I skal være sikre på de første 4 decimaler.

Opgave 3

I opgave 4 skal I tegne en spiral, der er sat sammen af kvartcirkler. I denne opgave skal I tegne en kvartcirkel ud fra to punkter.

Et par hints:

- På hvilken linje skal centrum for kvartcirklen ligge?
- Hvor stor skal vinklen fra centrum ud til de to punkter være?
- Forestil jer nu trekanten mellem centrum og de to punkter, den er delt i to trekanter af linjen fra hintet før. Se på de to små trekanter, hvordan skal de se ud?

Yderligere hints, hvis man mere formelt skal konstruere kvartcirklen:

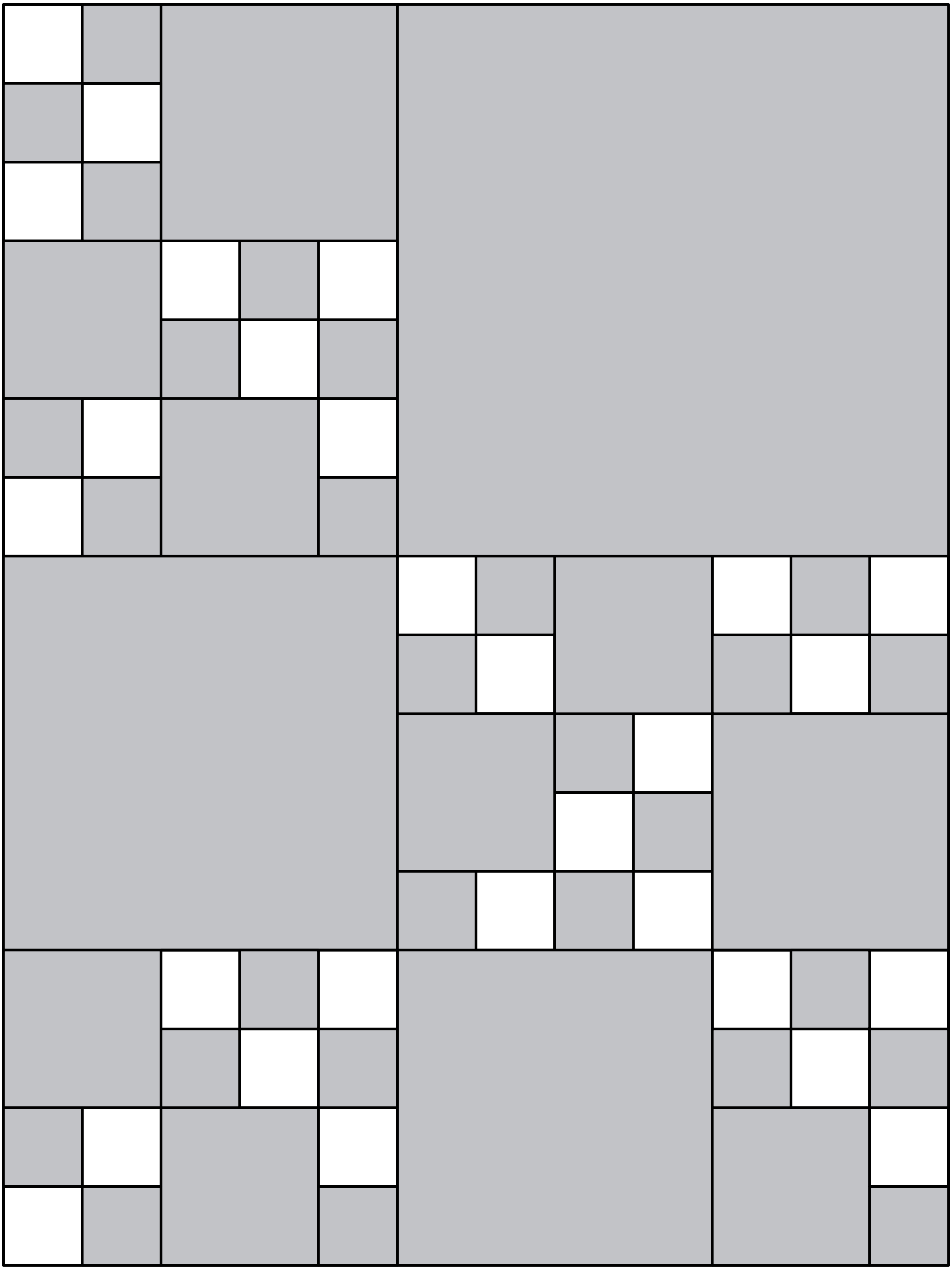
- Tegn en cirkel der går gennem de to punkter og har centrum i midtpunktet mellem de to punkter. Denne cirkel kan bruges til at finde centrum for kvartcirklen.
- Tegn nu kvartcirklen

Opgave 4

Tegn spiralen ind på $12 \cdot 16$ Pandovan-rektanglet på kopiarket.

Opgave 5

Tegn en $16 \cdot 21$ Pandovan-rektangel med en spiral.



Harriss-spiral - løsninger

Opgave 1

1. Hvilken formel skal der stå i cellerne A4 og C5?
   =A2+A3
   =C2+C3
2. Hvad er Fibonacci-tal nr 50?
   12586269025
3. Hvad er Padovan-tal nr 50?
   696081

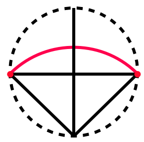
Opgave 2

1. Lav formler i cellerne B3 og D3
   =A3/A2
   =C3/C2

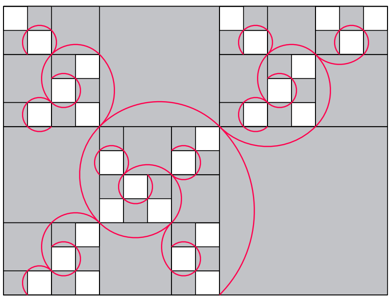
2. Find de to tal, som forholdene nærmer sig til
   Fibonacci: $\varphi = 1{,}6180\ldots$
   Padovan: $\rho = 1{,}3247\ldots$

Opgave 3

- På hvilken linje skal centrum for kvartcirklen ligge? *Midtnormalen for de to punkter.*
- Hvor stor skal vinklen fra centrum ud til de to punkter være? *90 grader*
- Forestil jer nu trekanten mellem centrum og de to punkter, den er delt i to trekanter af linjen fra hintet før. Se på de to små trekanter, hvordan skal de se ud? *Det er to små retvinklede ligebenede trekanter.*
- Tegn en cirkel der går gennem de to punkter og har centrum i midtpunktet mellem de to punkter. Denne cirkel kan bruges til at finde centrum for kvartcirklen. *Centrum for kvartcirklen er skæring mellem denne cirkel og midtnormalen.*
- Tegn nu kvartcirklen



Opgave 4



Opgave 5