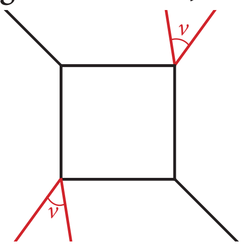
Få mønten gennem hullet - løsninger

1. **Hvad er diameteren af den største mønt (cirkel), der kan komme igennem hullet uden at folde papiret?**
For et kvadrat som dette er diagonalen det længste sted. Kalder man sidelængden af kvadratet for s og diagonalens længde for d gælder: $d = \sqrt{2 \cdot s^2} = \sqrt{2} \cdot s$

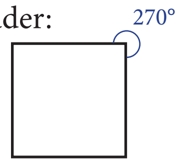
2. **Hvad er diameteren af den største mønt (cirkel), der kan komme igennem hullet, når man folder papiret som ovenfor?**
For et kvadrat som dette er længden af det største foldede hul 2 gange sidelængden af kvadratet. Det er diameteren af den største cirkel, der kan komme igennem hullet. Denne diameter kan vi kalde D. $D = 2 \cdot s$

3. **Hvad er arealet af hullet (før der foldes)?**
Arealet af hullet kan vi kalde a. $a = s^2$

4. **Hvad er arealet af den største mønt (cirkel), der kan komme igennem hullet, når man folder papiret som ovenfor?**
Arealet af den cirkel kan vi kalde A. $A = (\frac{D}{2})^2 \cdot \pi = s^2 \cdot \pi$



5. **Man kan lægge folderne alle mulige andre steder:**
Hvad skal der gælde om de angivne vinkler?
Den ydre vinkel i et hjørne i kvadratet er 270 grader:
Der skal da foldes så meget væk, at vi ender med en ret linje, dvs 180 grader.
Der skal altså foldes $270 - 180 = 90$ grader væk.
Det betyder, at vinklen mellem de to foldelinjer v skal være $v = \frac{90}{2} = 45$ grader. Man kan sige, at man laver en "flap", der er 2 gange 45 grader, som foldes væk under (eller over) resten af papiret. Man kan se at der er 3 lag, de to af lagene er flappen.



6. **Man kan også folde om andre huller end det kvadratiske.**
   a. **Hvordan skal man folde, så man kan få så stor en cirkel gennem hullet som muligt?**
   Ved et lige antal hjørner kan man starte med at folde hen over hullet ved at folde mellem to hjørner overfor hinanden. Ved et ulige antal hjørner kan man starte med at folde hen over hullet fra et hjørne til midt på siden overfor.
   Kalder vi antallet af hjørner for n er vinklen v mellem foldelinjerne i hvert hjørne givet ved $v = \frac{360}{2n}$

   b. **Find diameter af den største cirkel, der kan komme igennem et hul uden at folde papiret (d), og diameter af den største cirkel, der kan komme igennem et hul når man folder papiret så smart som muligt (D).**
   Diameter af den største cirkel, der kan komme igennem et hul uden at folde papiret, er længden af den længste diagonal i polygonet. Længden af denne diagonal kan vi kalde d.
   For n ulige er $d = s \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin(\frac{180}{2n})}$. For n lige er $d = s \cdot \frac{1}{\sin(\frac{180}{n})}$.

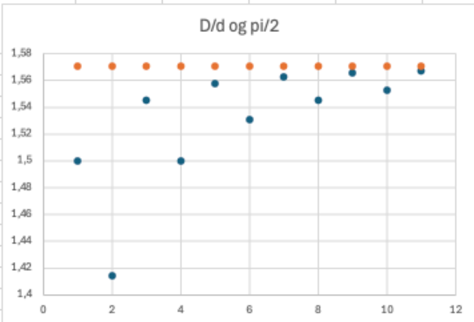
   Diameteren af den største cirkel, der kan komme igennem et hul, når man folder papiret så smart som muligt, er halvdelen af omkredsen af polygonet. Vi kalder denne diameter for D. $D = \frac{s \cdot n}{2}$

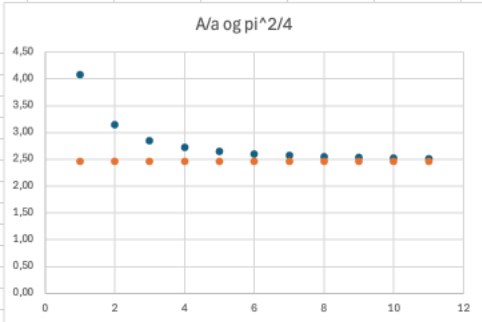
   c. **Find også arealerne af hullerne (a) og arealerne af de største cirkler (A) der kan komme igennem hullerne når man folder papiret så smart som muligt.**
   Arealet af hullerne, før der foldes kan vi kalde a. $a = \frac{1}{4} n \cdot s^2 \cdot \frac{\cos(\frac{180}{n})}{\sin(\frac{180}{n})}$
   Arealerne af de største cirkler, der kan komme igennem et hul, når man folder så smart som muligt kan vi kalde A. $A = \pi \cdot (\frac{D}{2})^2 = \pi \cdot \frac{s^2 \cdot n^2}{4}$

d. **Hvis hullet var en cirkel, og man kunne folde uendelige mange gange, hvor stor en cirkel kunne så komme igennem hullet?**
Hvis hullet var en cirkel med diameter d, så ville diameteren, D, af den største cirkel, der kan komme igennem hullet, når man folder uendelig smart være halvdelen af hullets omkreds, altså $D = \frac{\pi \cdot d}{2}$.
Arealet, a, af hullet ville være $a = \pi \cdot (\frac{d}{2})^2$ og arealet A af den største cirkel, der kan komme igennem, ville være $A = \pi \cdot (\frac{D}{2})^2 = \pi \cdot (\frac{\pi \cdot d}{4})^2$
Hvis $d = 1$, så er $D = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{\pi}{4}$ og $A = \frac{\pi^3}{16}$

e. **Prøv at finde systemer i ovenstående diametre og arealer.**
Man kan fx undersøge, hvordan forholdet mellem d og D ændrer sig når n vokser.
Man kan også undersøge, hvordan forholdet mellem a og A ændrer sig, når n vokser.
I nedenstående regneark er alle sidelængder 1, dvs $s = 1$.

n	s	d	D		D/d	pi/2	a	A	A/a	pi^2/4
3	1	1	1,5	3	1,5	1,571	0,43	1,77	4,08	2,47
4	1	1,41	2	4	1,41	1,571	1	3,14	3,14	2,47
5	1	1,62	2,5	5	1,55	1,571	1,72	4,91	2,85	2,47
6	1	2	3	6	1,5	1,571	2,60	7,07	2,72	2,47
7	1	2,25	3,5	7	1,56	1,571	3,63	9,62	2,65	2,47
8	1	2,61	4	8	1,53	1,571	4,83	12,57	2,60	2,47
9	1	2,88	4,5	9	1,56	1,571	6,18	15,90	2,57	2,47
10	1	3,24	5	10	1,55	1,571	7,69	19,63	2,55	2,47
11	1	3,51	5,5	11	1,57	1,571	9,37	23,76	2,54	2,47
12	1	3,86	6	12	1,55	1,571	11,20	28,27	2,53	2,47
13	1	4,15	6,5	13	1,57	1,571	13,19	33,18	2,52	2,47

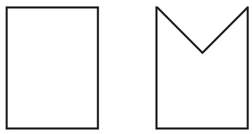


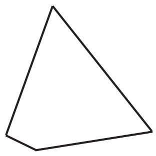


7. **Hullerne behøver ikke at være regulære polygoner. Så skal man til at gentænke, hvordan man folder det største hul.**

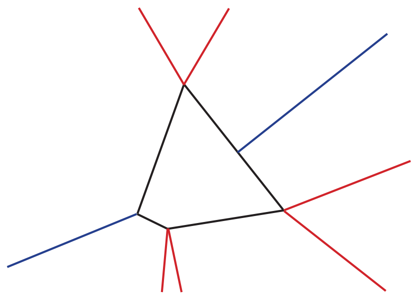
a. **Prøv først at overveje, hvor stor en cirkel man maksimalt kan få igennem en vilkårlig figur.**
Cirklens diameter kan maksimalt blive halvdelen af figurens omkreds.

b. **Prøv at folde om en polygon som denne**
Når figuren er konveks, skal man bare fjerne det der "stritter indad". Fx er den største cirkel, man kan få gennem disse to figurer den samme.





c. **Prøv fx at folde om en polygon som denne:**
Ved de to punkter med halvdelen af omkredsen imellem dem, skal man folde langs vinkelhalveringslinjerne (det er de to blå linjer). Jeg har valgt et hjørne, som det ene punkt, og så falder det andet punkt et sted på et linjestykke. Ved punktet på et linjestykke er vinkelhalveringslinjen den linje, der står vinkelret på linjestykket.



Ved de andre punkter skal man folde den overskydende vinkel væk, som tidligere beskrevet. Det er fx de røde linjer, men de kunne ligge alle mulige andre steder, når blot vinklen mellem dem er den rigtige.