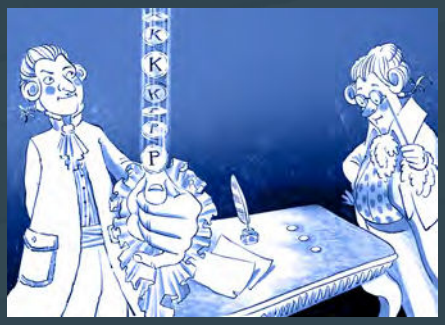
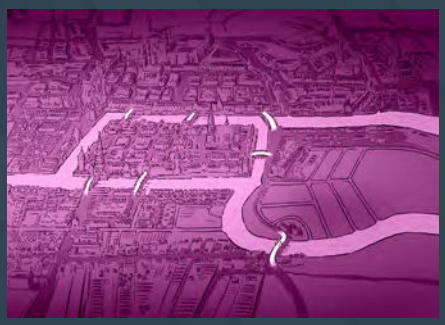
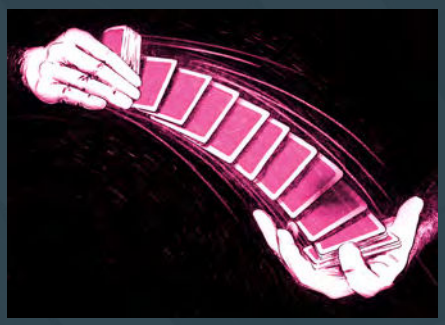
ERIK BJERRE OG PERNILLE PIND







LÆS SELV MATEMATIK

P & B FORLAGET PIND OG BJERRE

Indhold

1. Når VI er et tal 4
2. Halvfems 10
3. Labyrinter 14
4. Mål 24
5. Stjerner 32
6. Plat og krone 38
7. Tankelæseren 42
8. De 7 broer 48
9. Korttricks 52
10. Landkort 66
11. Uendelighed 76
12. Logik 84
13. A-formatet 92
14. Ellipser 98
15. Fraktaler 106

Facit 119

1

Når VI er et tal

Tal

Et tal er et tal. Det ved vi, når vi arbejder med matematik. Så skriver vi for eksempel 12 eller 9876. Men der er undtagelser. Når du for eksempel skriver en historie, bør du faktisk skrive tal under 10 med bogstaver – to eller syv eksempelvis.

Vi skriver ikke tal med bogstaver, når vi skal regne. Prøv at udregne nitusinde ottehundrede og seks og halvfjerds minus totusinde nihundrede og otte og halvfems. Det er meget lettere at udregne 9876 – 2998.

I Romerriget (for ca. 2.000 år siden) brugte man romertal. Det gjorde man faktisk i det meste af Europa indtil for ca. 500 år siden. Man syntes, at romertal var meget lettere at bruge og forstå end de arabiske tal, som vi nu bruger. Når romertallene var så populære, skyldtes det blandt andet, at de var lette hakke ind i sten eller skære ud i træ fordi de er så kantede.

Arabertal

Arabertal er taltegnene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9. Araberne overtog dem fra inderne, som dog havde brugt dem i en lidt anden form. Arabertallene kom til Europa i 1200-tallet, men de blev først for alvor populære efter middelalderen, dvs. for ca. 500 år siden. De er i dag verdens mest brugte taltegn.

Romertal

Du skal bare kunne bogstaverne I, V, X, L, C, D og M for at kunne arbejde med romertal. Og så skal du selvfølgelig kunne lægge sammen – og også trække fra.

Romerne havde symboler for forskellige tal. Man skriver symbolerne efter hinanden og lægger dem sammen.

Romertallene har symboler for følgende tal:

I = 1
V = 5
X = 10
L = 50
C = 100
D = 500
M = 1000

Man bruger kun disse syv symboler, når man skal skrive alle mulige andre tal.

Når man skriver et romertal, starter man som udgangspunkt med de største symboler og slutter med de mindste. Et par eksempler:

VII = 7, fordi det er 5 + 1 + 1.

CLXXVI = 176, fordi det er 100 + 50 + 10 + 10 + 5 + 1.

På et tidspunkt gik man over til også at kunne trække fra, når man skrev romertal. På den måde blev tallene lidt kortere. Reglen er, at hvis et mindre symbol står før et større symbol, skal det trækkes fra. Et par eksempler:

IV = 4, fordi det er 1 fra 5, dvs. 5 – 1.

VI er derimod 6, nemlig 5 + 1.

CXC = 190, fordi det er 100 plus 10 fra 100, altså 100 + (100 – 10).

Der er forskellige måder at skrive det samme tal rigtigt på, for eksempel kan 987 både skrives som CMLXXXVII og LMXXXVII.

Bruger man stadig romertal?

Man bruger ikke romertal så meget længere, men der er stadig områder, hvor man støder på dem.

- Vores dronning er Dronning Margrethe II.
- I 2023 afholdes den 57. finale i amerikansk fodbold, Super Bowl LVII.
- Nogle filmserier nummereres med romertal, for eksempel Rocky-filmene og StarWars.
- Mange ure bruger romertal
- I rulleteksterne på film bruges tit romertal til at fortælle, hvornår filmen er lavet

Additivt talsystem

Romertallene er et additivt talsystem. Det betyder, at symbolerne har en værdi, og når flere symboler skrives ved siden af hinanden, så er værdien af det flercifrede tal summen af de enkelte symbolers værdi. Det ændrede romerne dog lidt ved, da de indførte, at et mindre symbol skal trækkes fra et større symbol, når det mindre står til venstre for det større.

Positionssystem

Vi bruger i dag de arabiske talsymboler og et positionsystem. Et positionssystem betyder, at det samme symbol har forskellige værdier afhængig af hvor i tallet det står.

Et positionssystem har brug for en pladsholder, der markerer de tomme pladser i et flercifret tal, så man kan tælle hvilken plads symbolet har og dermed hvilken værdi. I titalssystemet bruger vi 0 som pladsholder.

Vores positionssystem kaldes et titalsystem, fordi vi har de ti forskellige symboler: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9. I et titalssystem ganges symbolernes værdi med ti for hver plads de rykkes til venstre. For eksempel betyder 500 ikke fem plus nul plus nul men femhundrede, fordi 5 står på hundredernes plads.

Positionssystemer har flere fordele. Det er nemmere at skrive store tal i et positionssystem, fordi de typisk er meget kortere. Med romertal skrives 4383 som MMMMCCCLXXXIII. I positionssystemet kan vi nøjes med fire pladser, i det additive talsystem, romertallene, må man bruge fjorten.

En anden stor fordel er, når vi skal gange med ti, hundrede, tusinde og så videre. Romerne skulle huske at X · V giver L, altså at ti gange fem giver halvtreds. Vi ved, at tager vi et femtal og tilføjer et nul (ved at gange med ti), så giver det halvtreds: $10 \cdot 5 = 50$. Romerne, derimod, måtte for eksempel lære udenad at X · X = C, X · L = D og X · C = M.

Det mystiske 0

Når man lægger 0 til et tal ændrer det ikke noget. Det ændrer heller ikke noget at trække 0 fra et tal. Og uanset hvor stort et tal man ganger med 0, ja så bliver resultatet bare 0.

Det er jo egentlig mærkeligt at lave et talsymbol for noget der ikke er der. Det er der ikke brug for i et additionssystem. Men i et positionssystem har man brug for en pladsholder, der ikke har en værdi i sig selv, så man for eksempel kan skelne mellem 703 og 73.

I Europa begyndte man først at bruge 0 i det 12. århundrede. I Maya-kulturen brugte de 0 1000 år tidligere.

Én måde at skrive 0 i Maya-kulturen

Opgaver

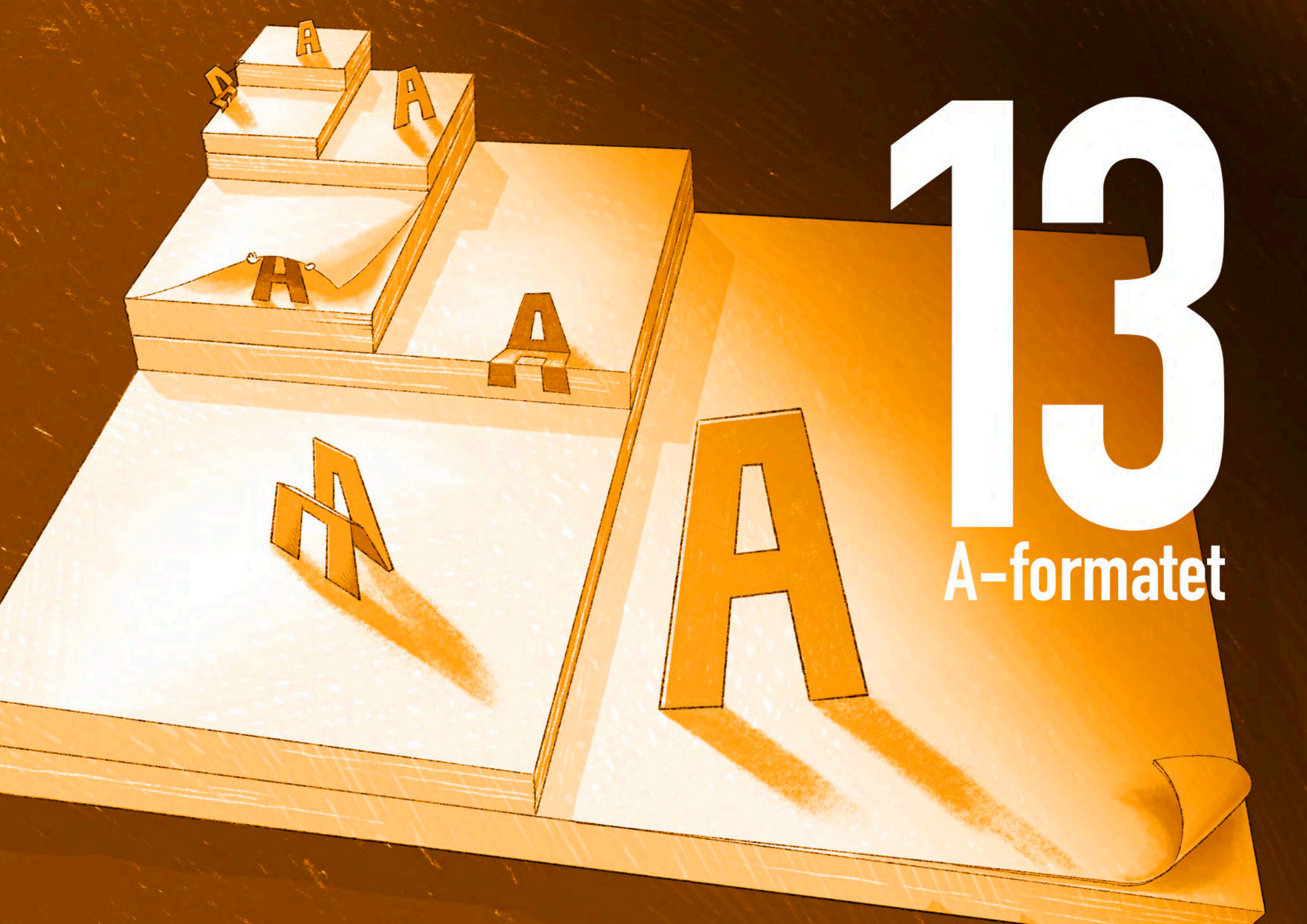
Opgave 1
Hvornår er huset bygget?

Opgave 2
Prøv at skrive 999, hvor du bruger metoden med at trække fra. Der er forskellige muligheder. Prøv også at skrive 999 uden at måtte trække fra. Hvad sker der?

Opgave 3
Prøv at skrive dit fødselsår med romertal.

Opgave 4
Skriv alle tal mellem 1988 og 2010 med romertal.

Opgave 5
Kan du finde et romertal, der kan skrives på mindst fem forskellige måder? Kan du finde flere? Hvilke cifre er det en god ide at lade indgå i de tal, du vil undersøge?



13

A-formatet

Jagten på det perfekte papirformat

I matematikken stræber man altid efter det perfekte og optimale. Hvad betyder det på noget så dagligdags som formatet af et stykke papir? Et perfekt format på et stykke papir kan være et, hvor der ikke bliver noget tilovers, når man skærer papiret over i mindre stykker, der alle sammen også har perfekte formater.

A4 er et sådan perfekt format af et stykke papir. A4-papiret er en af papirstørrelserne i A-formatet. Der er både A0, A1, A2, A3, A4, A5 … størrelser af papir. Alle papirer i A-formatet har den helt særlige egenskab, at skærer man dem over på midten af den lange led, får man to stykker papir med samme forhold mellem længde og bredde, som det originale stykke papir.

Nogle mener, at dette format af et stykke papir blev fundet – eller opfundet – allerede i 1755. Efter sigende blev der nemlig i 1755 stillet en eksamensopgave i matematik, der handlede om at lave papirformater med denne særlige egenskab.

Nogle år senere skriver professor Georg Christoph Lichtenberg til sin ven, Johann Beckmann, om papirformater med denne egenskab, og skriver, at den egenskab både er meget praktisk og giver meget smukke stykker papir.

Lad os regne på det

Kalder man længden for l og bredden for b, kan man udtrykke denne særlige egenskab (at forholdet mellem bredde og længde skal være det samme, når man halverer papiret) på denne måde: $\frac{l}{b} = \frac{b}{\frac{1}{2} \cdot l}$

Det kan man omarrangere lidt. Ved at gange med $l \cdot b$ på begge sider får man $l^2 = 2 \cdot b^2$. Ved at dividere med b^2 på begge sider og tage kvadratroden får man $\frac{l}{b} = \sqrt{2}$.

Det vil sige, at forholdet mellem længde og bredde for dette særlige papirformat er $\sqrt{2}$.

Egenskaben, at forholdet mellem længde og bredde skal være det samme, når man halverer papiret, er ikke nok til at finde ud af, hvor stort et stykke A4-papir er. Det afhænger jo af, hvor stort et stykke papir man starter med at halvere. Konkret skal man fastlægge, hvor stort A0 skal være. Hvordan A4 fremkommer fra A0 kan man se på tegningen på næste side.

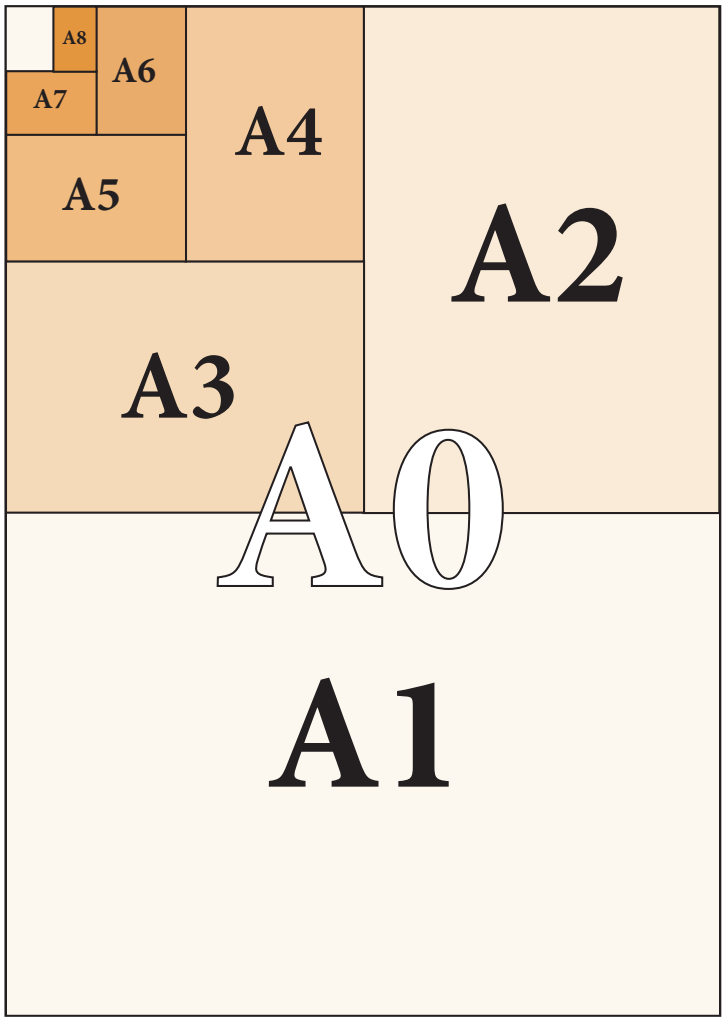
Først i 1921 ender det med, at man i Tyskland definerer, hvor stort A0 skal være, ved at tilføje kravet om, at A0 skal være 1 kvadratmeter.

Vi kan nu opstille to ligninger med to ubekendte for at finde længden og bredden.

$\frac{l}{b} = \sqrt{2}$
$l \cdot b = 1$ (som siger, at arealet skal være 1)

Løser man dette ligningssystem får man:
$l \cdot b = 1$ giver $b = \frac{1}{l}$. Det sætter man ind i den første ligning og får $\frac{l}{\frac{1}{l}} = \sqrt{2}$.

Ganger man venstre sides tæller og nævner med l, får man $l^2 = \sqrt{2}$.
Tager man nu kvadratroden på begge sider, får man at
$l = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892$ m, og
$b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}8409$ m, og vi har nu målene på A0.



Så skal man igennem et par halveringer for at få målene for A4:

$l = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \approx 0{,}2973$ m $= 29{,}73$ cm

$b = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{2}} \approx 0{,}2102$ m $= 21{,}02$ cm

Man har valgt at afrunde til den nærmeste millimeter, så længden af et stykke A4-papir er 29,7 cm og bredden er 21,0 cm.

A-formatet er en del af ISO standarderne. ISO står for International Organization for Standardization

USA

A-formatet bruges stort set over hele verden, men selvfølgelig – har man lyst til at sige – med USA som en stor undtagelse. USA fastholder deres egne, på mange måder mere naturlige, mål indenfor alt muligt. For eksempel længder med inches og yards, vægt med ounzes og pounds, temperaturer i fahrenheit og så videre. Og altså også med papirstørrelser, hvor formatet på deres typiske printerpapir hedder "letter".

Facit

1. Når VI er et tal

Opgave 1
Huset er fra 1786.

Opgave 2
999 kan for eksempel skrives på følgende måder, når man bruger at trække fra:

- CMXCIX
- IM

Hvis man ikke må trække fra, bliver man nødt til at skrive:
DCCCCLXXXXVIIII

Opgave 4

1988 = MDCCCCLXXXVIII	= MCMLXXXVIII	
1989 = MDCCCCLXXXVIIII	= MCMLXXXIX	
1990 = MDCCCCLXXXX	= MCMXC	= MXM
1991 = MDCCCCLXXXXI	= MCMXCI	= MXMI
1992 = MDCCCCLXXXXII	= MCMXCII	= MXMII
1993 = MDCCCCLXXXXIII	= MCMXCIII	= MXMIII
1994 = MDCCCCLXXXXIIII	= MCMXCIV	= MXMIV
1995 = MDCCCCLXXXXV	= MCMXCV	= MXMV
1996 = MDCCCCLXXXXVI	= MCMXCVI	= MXMVI
1997 = MDCCCCLXXXXVII	= MCMXCVII	= MXMVII
1998 = MDCCCCLXXXXVIII	= MCMXCVIII	= MXMVIII
1999 = MDCCCCLXXXXVIIII	= MCMXCIX	= MIM
2000 = MM		
2001 = MMI		
2002 = MMII		
2003 = MMIII		
2004 = MMIIII	= MMIV	
2005 = MMV		
2006 = MMVI		
2007 = MMVII		

2008 = MMVIII
2009 = MMVIIII = MMIX
2010 = MMX

Opgave 5
499 kan skrives på 6 måder:
CCCCLXXXXVIIII
(100 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1)
CDXCIX
(500 – 100 + 100 – 10 + 10 – 1)
LDVLIV
(500 – 50 + 50 – 5 + 5 – 1)
XDIX
(500 – 10 + 10 – 1)
VDIV
(500 – 5 + 5 – 1)
ID
(500 – 1)

De arabiske tal med mindst tre cifre, hvori cifrene 4 og/eller 9 indgår, har en god chance for at kunne skrives på mange måder.
For eksempel kan 999, 1499, 1999, 2499 og 2999 også skrives på seks måder.

2. Halvfems

Opgave 1
40 kunne med sinde tyve-systemet have heddet to sinde tyve, som kan forkortes til tos.

Opgave 2
30 kunne med sinde tyve-systemet have heddet halvanden sinde tyve, som kan forkortes til halvands.

Opgave 3
100 kunne med sinde tyve-systemet have heddet fem sinde tyve, som kan forkortes til fems.