

3.1 Regnestykke = regnestykke

$$2 + 3 = 1 + 4$$

$$7 + 2 = 5 + 4$$

$$1 + 7 = 2 + 6$$

$$9 + 3 = 5 + 7$$

$$2 + 9 = 4 + 7$$

$$6 + 5 = 3 + 8$$

$$2 + 2 + 8 = 5 + 7$$

$$1 + 8 = 2 + 3 + 4$$

$$5 + 6 + 7 = 2 + 18$$

$$3 + 5 + 7 = 2 + 4 + 9$$

$$8 - 3 = 9 - 4$$

$$\text{fx } 5 - 2 = 8 - 5$$

$$4 - 2 = 5 - 3$$

$$12 - 4 = 15 - 7$$

$$18 - 9 = 9 - 0$$

$$9 - 7 = 16 - 14$$

$$21 - 8 = 19 - 6$$

$$25 - 18 = 10 - 3$$

$$10 - 5 = 17 - 12$$

$$22 - 11 = 12 - 1$$

3.2 Hver side for sig

Variationer og udfordringer kan være:

- positive hele tal, negative tal, brøker, decimaltal, potenser og rødder
- 0 og 1
- plus, minus, gange, division, flere regningsarter, brøkstreger
- et led, flere led
- parenteser
- to faktorer, flere faktorer
- variable

fx

$$5 = 5$$

$$3 + 2 = 7 - 2$$

$$1/2 + 4,5 = -2 - 7 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 4 / (2 + 2)$$

$$5 \cdot 1 = 2a + (\sqrt{5})^2 + a + 0 - a$$

3.3 Det samme på begge sider

Variationer og udfordringer kan være:

- positive hele tal, negative tal, brøker, decimaltal, potenser og rødder
- 0 og 1
- plus, minus, gange, division, flere regningsarter, brøkstreger
- et led, flere led
- parenteser
- to faktorer, flere faktorer
- variable

fx

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 10 + 4 = 6 + 10$$

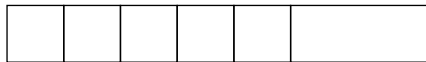
$$(1/2 \cdot (2 + 4) - 3/2) \cdot 17 = (1/2 \cdot 6 - 3/2) \cdot 17$$

$$(2 + 4) \cdot x = 6 \cdot x$$

3.7 Udtryk for omkreds og areal

ark 1 øverst

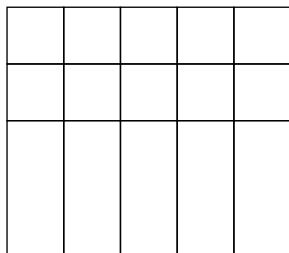
$$12a + 2b$$



$$(a + 5a + b) \cdot 2$$

ark 1 nederst

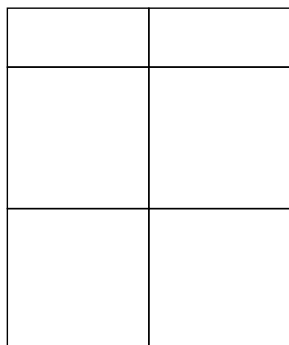
$$14a + 2b$$



$$(5a + 2a + b) \cdot 2$$

ark 2 øverst

$$2a + 8b$$



$$(2b + a + 2b) \cdot 2$$

ark 2 nederst

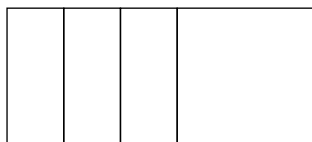
$$6a + 8b$$



$$(3b + 3a + b) \cdot 2$$

ark 3 øverst

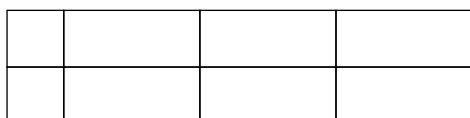
$$6a + 4b$$



$$(b + 3a + b) \cdot 2$$

ark 3 nederst

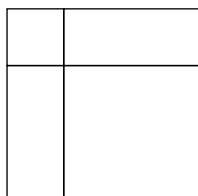
$$6a + 6b$$



$$(2a + a + 3b) \cdot 2$$

ark 4 øverst

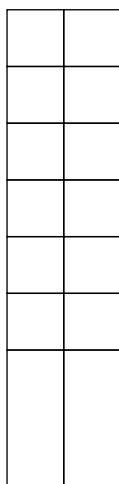
$$4a + 4b$$



$$(b + a + a + b) \cdot 2$$

ark 4 nederst

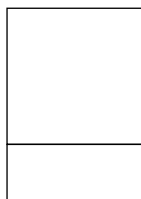
$$16a + 2b$$



$$(2a + 6a + b) \cdot 2$$

ark 5 øverst

$$2a + 4b$$



$$(a + b + b) \cdot 2$$

ark 5 nederst

$$4a + 2b$$



$$(a + a + b) \cdot 2$$

3.7 Udtryk for omkreds og areal

Der er fx disse måder:

ark 6 øverst

$$3a \cdot 2b + ab + 3ab$$

$$10ab$$

ark 6 nederst

$$2ab + 4a \cdot 2b + 2ab$$

$$12ab$$

ark 7 øverst

$$3ab + 3ab + 3ab$$

$$9ab$$

ark 7 nederst

$$ab + a \cdot 3b + a \cdot 5b$$

$$9ab$$

ark 8 øverst

$$3ab + 9a \cdot 2b$$

$$21ab$$

ark 8 nederst

$$4a(b + a) + 2b(2b + 2a)$$

$$4b^2 + 4a^2 + 8ab$$

ark 9 øverst

$$ba + (2b + a)2b$$

$$4b^2 + 3ab$$

ark 9 nederst

$$b(2a + 2b)$$

$$2ab + 2b^2$$

ark 10 øverst

$$(2a + b)2b + ab + 3a(5a + b)$$

$$2b^2 + 15a^2 + 8ab$$

ark 10 nederst

$$4a(2a + 2b) + 3a \cdot 2a$$

$$14a^2 + 8ab$$

3.8 Er udtrykkene ækvivalente?

ark 1 øverst

Ja, de er enige, da $3 + 2(n - 1) = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$.

ark 1 nederst

nej, de er ikke enige. $1 + (n - 1) + (n - 1)$ er det korrekte.

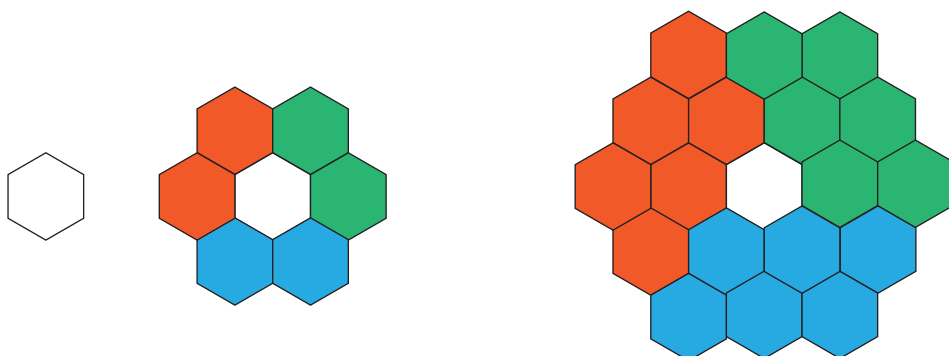
ark 2 øverst

Ja, de er enige, da $2(n + 2) - 2 = 2n + 4 - 2 = 2n + 2 = n + 2 + n$.

ark 2 nederst

Ja, de er enige da $3n(n - 1) + 1 = 3n^2 - 3n + 1$.

Tegning, der forklarer tanken bag $3n(n - 1) + 1$ er tre "rektangler" plus den i midten.



ark 3 øverst

nej, de er ikke enige. $2n + 1$ er det korrekte.

ark 3 nederst

nej, de er ikke enige. $5n - 2 \cdot (n - 2) - 1 \cdot 2$ er det korrekte.

ark 4 øverst

nej, de er ikke enige. $n^2 + (n - 1)^2$ er det korrekte.

ark 4 nederst

Ja, de er enige da $2 \cdot ((n + 1) \cdot n/2 + n \cdot (n - 1)/2) + 2 \cdot 2 \cdot (n - 1) + 3 = n^2 + n + n^2 - n + 4n - 4 + 3 = 2n^2 + 4n - 1$

3.10 Flowchart og omvendt

ark 1 øverst

Ind	0	1	2	9	10
Ud	2	4	6	20	22

Ind	4	5	7	8	11
Ud	10	12	16	18	24

ark 1 nederst

Ind	2	7	8	11	12
Ud	8	18	20	26	28

Ind	0	1	4	5	10
Ud	4	6	12	14	24

ark 2 øverst

Ind	0	1	2	10	11
Ud	9	14	19	59	64

Ind	5	6	7	13	14
Ud	34	39	44	74	79

ark 2 nederst

Ind	3	4	5	11	12
Ud	34	44	54	114	124

Ind	0	1	2	9	10
Ud	4	14	24	94	104

ark 3 øverst

Ind	3	4	5	13	14
Ud	4	9	14	54	59

Ind	6	7	8	16	17
Ud	19	24	29	69	74

ark 3 nederst

Ind	-0,5	2	3	14	15
Ud	-7	18	28	138	148

Ind	-1	0	0,5	10	11
Ud	-12	-2	3	98	108

ark 4 øverst

Ind	-2	-1	1,5	10	11
Ud	-4,5	-3,5	-1	7,5	8,5

Ind	-1,5	-0,5	0	5	6
Ud	-4	-3	-2,5	2,5	3,5

ark 4 nederst

Ind	-0,5	0	5	6	20
Ud	3,5	4	9	10	24

Ind	-4	-2	-1,5	1	1,5
Ud	0	2	2,5	5	5,5

ark 5 øverst

Ind	-3	-2	1	1,5	10
Ud	-0,5	0	1,5	1,75	6

Ind	-0,5	0	0,5	17	18
Ud	0,75	1	1,25	9,5	10

ark 5 nederst

Ind	-6	-5	0	0,5	1,5
Ud	-1	-0,5	2	2,25	2,75

Ind	-8	-4	-3	-0,5	4
Ud	-2	0	0,5	1,75	4

3.11 Hvilken af disse beregninger vil løse ligningen?

ark 1 øverst

1	træk 5 fra divider med 10	Falsk	3	træk 10 fra divider med 5	Sand
2	divider med 5 træk 2 fra	Sand	4	træk 5x fra træk 10 fra	Falsk

ark 1 nederst

1	læg 10 til divider med 3	Sand	3	læg 3 til divider med 10	Falsk
2	divider med 3 læg $3\frac{1}{3}$ til	Sand	4	træk 2x fra træk -10 fra	Falsk

ark 2 øverst

1	træk 6x fra træk 3 fra	Falsk	3	træk 7 fra divider med 3	Falsk
2	træk 7x fra træk 10 fra divider med -7	Sand	4	træk 3 fra divider med 7	Sand

ark 2 nederst

1	læg $\frac{1}{2}$ til divider med 4	Sand	3	læg $\frac{4}{2}$ til divider med $\frac{1}{2}$	Falsk
2	gang med 2 læg 1 til divider med 8	Sand	4	træk $\frac{1}{2}$ fra træk 4x fra	Falsk

ark 3 øverst

1	træk 6 fra divider med 2	Falsk	3	læg 6 til divider med 2	Sand
2	divider med 2 læg 3 til	Sand	4	læg 10 til træk 2x fra divider med -2	Sand

ark 3 nederst

1	divider med 2 træk 7 fra	Falsk	3	træk 7x fra træk 12 fra divider med -5	Sand
2	træk 2x fra træk 2 fra divider med 5	Sand	4	træk 2x fra træk 2 fra divider med 7	Falsk

ark 4 øverst

1	læg 4x til træk 7 fra divider med -3	Sand	3	læg 7x til træk 10 fra divider med 3	Sand
2	træk 4x fra træk 10 fra	Falsk	4	træk 7x fra træk 10 fra divider med 4	Falsk

ark 4 nederst

1	træk 6x fra træk 0,25 fra divider med 10	Falsk	3	gang med 4 læg 24x til læg 1 til divider med 64	Sand
---	--	-------	---	--	------

2	læg 6x til læg 0,25 til divider med 16	Sand	4	træk 10 fra træk 0,25 fra	Falsk
---	--	------	---	------------------------------	-------

ark 5 øverst

1	træk x fra træk 75,75 fra divider med 0,75	Sand	3	træk 1,75x fra træk 159,75 fra	Falsk
2	træk x fra træk 75,75 fra gang med 4 divider med 3	Sand	4	gang med 4 træk 4x fra træk 303 fra divider med 3	Sand

ark 5 nederst

1	træk 4x fra træk 9 fra	Falsk	3	træk 4x fra træk 9 fra divider med -3	Sand
2	træk 9 fra træk 24 fra træk 4 fra	Falsk	4	træk x fra træk 24 fra divider med 3	Sand

3.12 Forklar ligningsløsning

Ark 1

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

trækker 10 fra
dividerer med 5

$$3x - 10 = 5$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

lægger 10 til
dividerer med 3

$$10 = 7u + 3$$

$$7 = 7u$$

$$1 = u$$

trækker 3 fra
dividerer med 7

$$4z - 1/2 = 3/2$$

$$4z = 2$$

$$z = 1/2$$

lægger 1/2 til
dividerer med 4

Ark 2

$$2a - 6 = -10$$

$$2a = -4$$

$$a = -2$$

lægger 6 til
dividerer med 2

$$7x + 2 = 2x + 12$$

$$5x + 2 = 12$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

trækker 2x fra
trækker 2 fra
dividerer med 5

$$10 - 4x = -7x + 7$$

$$10 = -3x + 7$$

$$3 = -3x$$

$$-1 = x$$

lægger 4x til
trækker 7 fra
dividerer med -3

Ark 3

$$10z - 0,25 = -6z + 3,75$$

$$16z - 0,25 = 3,75$$

$$16z = 4$$

$$z = 0,25$$

lægger 6z til
lægger 0,25 til
dividerer med 16

$$1,75w + 75,75 = w + 159,75$$

$$0,75w + 75,75 = 159,75$$

$$0,75w = 84$$

$$w = 112$$

trækker w fra
trækker 75,75 fra
dividerer med 0,75 eller ganger med 1,33...

Ark 4

$$3(a + 1) + 6 - 2a = 24 + 4a$$

$$3a + 3 + 6 - 2a = 24 + 4a$$

$$a + 9 = 24 + 4a$$

$$9 = 24 + 3a$$

$$-15 = 3a$$

$$-5 = a$$

ganger 3 ind i parentesen på venstre side
reducerer på venstre side $3a - 2a = a$ og $3 + 6 = 9$
trækker a fra
trækker 24 fra
dividerer med 3

$$15 = 15/x + 12$$

$$3 = 15/x$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

trækker 12 fra
ganger med x
dividerer med 3

3.13 Ping pong ligningsløsning

Opgave	Facit
$-2x + 12 = 2x + 4$	$x = 2$

$-x - 3 = 2x - 6$	$x = 1$
$5 - x = 3x + 9$	$x = -1$
$2x + 5 = -3x + 15$	$x = 2$
$x - 4 = -2x + 5$	$x = 3$
$-5 + 3x = -13 - x$	$x = -2$
$x + 8 = 20 - x$	$x = 6$
$3x - 3 = -x - 3$	$x = 0$
$2x - 4 = -x + 8$	$x = 4$
$12 - 3x = x$	$x = 3$

3.15 Hvad er gået galt

Ark 1

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 5$$

Trækker 5 fra i stedet for at dividere med 5

$$x = 10/5$$

$$x = 2$$

$$3x - 10 = 25$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

Trækker 10 fra i stedet for at lægge 10 til

$$3x = 25 + 10 = 35$$

$$x = 35/3$$

$$x = 11,66..$$

$$10 = 7x + 3$$

$$7 = 7x$$

$$0 = x$$

Enten trækker 7 fra i stedet for at dividere med 7, eller tænker "x skal være ingenting"

$$x = 7/7$$

$$x = 1$$

Ark 2

$$4x - 1/2 = 3/2$$

$$4x = 2$$

$$x = 2$$

Siger 4:2 i stedet for 2:4, mange kan ikke lide at ende med en brøk, og gør så det modsatte.

$$x = 2/4$$

$$x = 1/2$$

$$2x - 6 = -10$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Laver fortegnsfejl, får 4 i stedet for -4 ($10 - 6$ i stedet for $-10 + 6$), mange kan ikke lide negative tal, og gør så det modsatte.

$$2x = -10 + 6 = -4$$

$$x = -4/2$$

$$x = -2$$

$$3x - 2 = 2x + 12$$

$$5x - 2 = 12$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

Laver 2 fejl, lægger $2x$ til på venstre side i stedet for at trække det fra. Trækker 2 fra på højre side i stedet for at lægge det til. Fejlen kan opstå ved at "flytte over" uden samtidig at skifte fortegn.

$$3x - 2x - 2 = 12$$

$$x - 2 = 12$$

$$x = 14$$

Ark 3

$$10x - 0,25 = -6x + 3,75$$

$$16x - 0,25 = 3,75$$

$$16x = 4$$

$$x = 4$$

Siger $16:4$ i stedet for $4:16$, mange kan ikke lide at ende med en brøk, og gør så det modsatte.

$$x = 4/16$$

$$x = 1/4$$

$$1,75x + 75,75 = x + 159,75$$

$$0,75x + 75,75 = 159,75$$

$$0,75x = 84$$

$$x = 63$$

Siger $84 \cdot 0,75$ i stedet for $84:0,75$, mange kan ikke lide at dividere med et tal under 1, da resultatet så er større end dividenden, og gør så det modsatte.

$$x = 84/0,75$$

$$x = 112$$

$$3x + 3 + 6 - 2x = 24 + 4x$$

$$x + 9 = 24 + 4x + 2x$$

$$9 = 24 + 5x$$

$$-15 = 5x$$

$$-3 = x$$

Reducerer venstresidens $3x - 2x$ til x , men lægger samtidig $2x$ til på højresiden. Blander reduktion og ligningsløsning sammen.

$$x + 9 = 24 + 4x$$

$$-15 = 3x$$

$$x = -5$$

Ark 4

$$18 = 15/x - 12$$

$$30 = 15/x$$

$$2 = x$$

Dividerer 30 med 15 i stedet for at gange med x først, og så dividere 15 med 30.

$$30x = 15$$

$$x = 15/30$$

$$x = 1/2$$

3.16 Taltricks

Ark 1	
tænk på et tal	t
læg 2 til	$t + 2$

	Ark 2
tænk på et tal	t
træk 1 fra	$t - 1$

gang det med 5	$5 \cdot (t + 2) = 5t + 10$
træk 5 fra	$5t + 10 - 5 = 5t + 5 = 5(t + 1)$
divider det med tallet, der er 1 større end det du startede med. Så får du 5	$5(t + 1)/(t + 1) = 5$

Ark 3

tænk på et tal	t
gang med 6	$6t$
træk 12 fra	$6t - 12 = 6(t - 2)$
divider med tallet, der er 2 mindre end det du startede med. Så får du 6	$6(t - 2)/(t - 2) = 6$

Ark 5

tænk på et tal	t
læg 6 til	$t + 6$
gang med 2	$2(t + 6) = 2t + 12$
træk 10 fra	$2t + 12 - 10 = 2t + 2 = 2(t + 1)$
divider med tallet, der er 1 større end det du startede med. Så får du 2	$2(t + 1)/(t + 1) = 2$

Ark 7

tænk på et tal	t
gang med 8	$8t$
træk 16 fra	$8t - 16 = 8(t - 2)$
divider med tallet, der er 2 mindre end det du startede med. Så får du 8	$8(t - 2)/(t - 2) = 8$

Ark 9

gang det med 10	$10 \cdot (t - 1) = 10t - 10$
læg 30 til	$10t - 10 + 30 = 10t + 20 = 10(t + 2)$
dividerer det med tallet, der er 2 større end det du startede med. Så får du 10	$10(t + 2)/(t + 2) = 10$

Ark 4

tænk på et tal	t
gang med 5	$5t$
læg 15 til	$5t + 15 = 5(t + 3)$
divider med tallet, der er 3 større end det du startede med. Så får du 5	$5(t + 3)/(t + 3) = 5$

Ark 6

tænk på et tal	t
træk 6 fra	$t - 6$
gang med 0,5	$0,5(t - 6) = 0,5t - 3$
læg 7 til	$0,5t - 3 + 7 = 0,5t + 4 = 0,5(t + 8)$
divider med tallet, der er 8 større end det du startede med. Så får du 0,5	$0,5(t + 8)/(t + 8) = 0,5$

Ark 8

tænk på et tal	t
gang med 0,1	$0,1t$
læg 100 til	$0,1t + 100 = 0,1(t + 1000)$
divider med tallet, der er 1000 større end det du startede med. Så får du 0,1	$0,1(t + 1000)/(t + 1000) = 0,1$

Ark 10

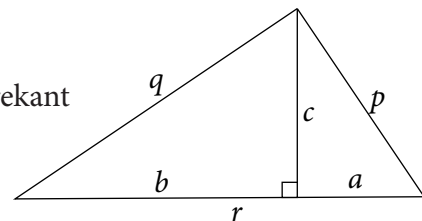
tænk på et tal	t
gang tallet med sig selv	t^2
træk 4 fra	$t^2 - 4 = (t + 2)(t - 2)$
divider med tallet, der er 2 mindre end det du startede med	$(t + 2)(t - 2)/(t - 2) = t + 2$
træk tallet, du startede med fra. Så ender du med 2.	$t + 2 - t = 2$

tænk på et tal	t
gang tallet med sig selv	t^2
træk 9 fra	$t^2 - 9 = (t + 3)(t - 3)$
divider med tallet, der er 3 større end det du startede med	$(t + 3)(t - 3)/(t + 3) = t - 3$
træk tallet, du startede med fra. Så ender du med -3 .	$t - 3 - t = -3$

3.18 Pythagoras' sætning algebraisk

Gennemfør beviset for Pythagoras' sætning for denne retvinklede trekant

$$\begin{aligned} p/r &= a/p \\ q/r &= b/q \end{aligned}$$



Ganger vi det første forhold med $p \cdot r$ og det andet forhold med $q \cdot r$ på begge sider af lighedstegnet får vi $p^2 = a \cdot r$ og $q^2 = b \cdot r$.
 $p^2 + q^2 = a \cdot r + b \cdot r$
 $p^2 + q^2 = (a + b) \cdot r$

Da $a + b = r$, får man at $p^2 + q^2 = r^2$

3.19 Sum af to ulige tal er lige

Ark 1

Bevis at summen af to lige tal er lige.

Et lige tal kan skrives som 2 gange et helt tal.

$$l = 2n \quad k = 2m$$

$$l + k = 2n + 2m$$

$$l + k = 2 \cdot (n + m)$$

$l + k$ er lige, da det er 2 gange et helt tal ($n + m$ er et helt tal).

Bevis at summen af tre ulige tal er ulige.

Et ulige tal kan skrives som et lige tal (dvs 2 gange et helt tal) plus 1.

$$u = 2n + 1 \quad v = 2m + 1 \quad w = 2p + 1$$

$$u + v + w = 2n + 1 + 2m + 1 + 2p + 1$$

$$u + v + w = 2n + 2m + 2p + 3$$

$$u + v + w = 2n + 2m + 2p + 2 + 1$$

$$u + v + w = 2 \cdot (n + m + p + 1) + 1$$

$u + v + w$ er ulige, da det er et lige tal (dvs 2 gange et helt tal ($n + m + p + 1$ er et helt tal) plus 1

Bevis at summen er fire hele tal, der kommer lige efter hinanden, er lige.

Fire hele tal der kommer lige efter hinanden kan skrives som:

t og $t + 1$ og $t + 2$ og $t + 3$

Summen, som vi kan kalde S , af disse er:

$$S = t + t + 1 + t + 2 + t + 3$$

$$S = 4t + 1 + 2 + 3$$

$$S = 4t + 6$$

$$S = 2(2t + 3)$$

S er lige, da S er 2 gange et helt tal ($2t + 3$ er et helt tal).

Ark 2

Bevis at produktet af to lige tal er lige.

Et lige tal kan skrives som 2 gange et helt tal.

$$l = 2n \quad k = 2m$$

$$l \cdot k = 2n \cdot 2m$$

$$l \cdot k = 2(n \cdot 2m)$$

$l \cdot k$ er lige, da det er 2 gange et helt tal ($n \cdot 2m$ er et helt tal)

Bevis at produktet af to ulige tal er ulige.

Et ulige tal kan skrives som et lige tal (dvs 2 gange et helt tal) plus 1.

$$u = 2n + 1 \quad v = 2m + 1$$

$$u \cdot v = (2n + 1) \cdot (2m + 1)$$

$$u \cdot v = 4nm + 2n + 2m + 1$$

$$u \cdot v = 2(2nm + n + m) + 1$$

$u \cdot v$ er ulige, da det er et lige tal dvs 2 gange et helt tal ($2nm + n + m$ er et helt tal) plus 1.