Relation mellem variable når de ændres

Et funktionsudtryk eller en formel giver en sammenhæng mellem nogle variable. Man kan sætte tal ind og beregne andre tal.

Man kan overordnet forholde sig til funktioner og formler ved at undersøge funktioner og formler for hvad der sker med én variabel, når en anden variabel ændres.

Lineære funktioner

I lineære funktioner er $y = a \cdot x + b$. Der gælder at

- når x øges med en konstant øges y også med en konstant, nemlig $a \cdot$ konstanten.

Det kan man undersøge ved at se på konkrete tal i en tabel, og ved at regne algebraisk på det.

$y = 4x + 2$

Hvad sker der med y hver gang x øges med 10?

x	0	10	20	30	40
y	2	42	82	122	162
forskel		40	40	40	40

Man kan se, at hver gang x øges med 10, så øges y med $4 \cdot 10 = 40$.

Når x øges med 10 er det nye x altså $x + 10$. Det sætter vi ind i udtrykket $y = 4x + 2$:

$y = 4 \cdot (x + 10) + 2 = 4x + 40 + 2 = 4x + 2 + 40$

Her kan vi se, at det nye y er 40 mere end det gamle y.

Hvad sker der med y hver gang x bliver dobbelt så stor?

x	1	2	4	8	16
y	6	10	18	34	66
forhold		1,666	1,8	1,888	1,941

Når x bliver fordoblet bliver y ikke på samme måde fordoblet. Forholdet mellem to y værdier når x fordobles er ikke 2, det er ikke engang konstant. Det starter med 1,666… og bliver større og større. Det nærmer sig nok 2.

Man kan prøve at se på forskellene i stedet:

x	1	2	4	8	16
y	6	10	18	34	66
forskel		4	8	16	32

Det er der et system i, men ikke et der nemt siger noget om y-værdierne. Det er altså ikke sådan, at når x bliver dobbelt så stor så øges y med noget bestemt.

Når x fordobles er det nye x altså $2x$. Det sætter vi ind i udtrykket $y = 4x + 2$:

$y = 4 \cdot (2x) + 2 = 8x + 2$

Det nye y er hverken er et tal ganget med det gamle y eller et tal lagt til det gamle y.

Proportionalitet

Den særlige lineære funktion, hvor $b = 0$ altså $y = a \cdot x$ kaldes en proportionalitet. Der gælder at

- hver gang x øges med en konstant så øges y også med en konstant, nemlig $a \cdot$ konstanten.
- hver gang x ganges med en konstant, så ganges y med samme konstant.

$y = 5x$

Hvad sker der med y hver gang x øges med 10?

x	0	10	20	30	40
y	0	50	100	150	200
forskel		50	50	50	50

Når x øges med 10 er det nye x altså $x + 10$. Det sætter vi ind i udtrykket $y = 5x$:

$y = 5 \cdot (x + 10) = 5x + 50$

Her kan vi se, at det nye y er 50 mere end det gamle y.

Hvad sker der med y hver gang x bliver dobbelt så stor?

x	1	2	4	8	16
y	5	10	20	40	80
forhold		2	2	2	2

Når x bliver fordoblet bliver y også fordoblet. Forholdet mellem to y værdier er 2 når x fordobles.

Når x fordobles er det nye x altså $2x$. Det sætter vi ind i udtrykket $y = 5x$:

$y = 5 \cdot (2x) = 10x$

Her kan vi se, at det nye y er 2 gange mere end det gamle y.

Eksponentielle funktioner

I eksponentielle funktioner er $y = b \cdot a^x$. Der gælder at

- hver gang x øges med en konstant k, så ganges y med en konstant, nemlig a^k.

$y = 3 \cdot 1{,}5^x$

Hvad sker der med y hver gang x øges med 10?

x	0	10	20	30	40
y	3	173	9975,77	375353,18	33171996,96
forhold		57,67	57,67	57,67	57,67

Når x øges med 10 er det nye x altså $x + 10$. Det sætter vi ind i udtrykket $y = 3 \cdot 1{,}5^x$:

$y = 3 \cdot 1{,}5^{(x+10)} = 3 \cdot 1{,}5^x \cdot 1{,}5^{10}$

Her kan vi se, at det nye y er $1{,}5^{10}$ gange det gamle y. $1{,}5^{10} = 57{,}67$.

Andengradspolynomium

I andengradspolynomiet er $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Hverken når x øges med en konstant eller ganges med en konstant er der en umiddelbar sammenhæng til hvad der sker med y.

Omvendt proportionalitet

I den omvendte proportionalitet er $y = \frac{a}{x}$. Der gælder at

- hver gang x ganges med en konstant k, så ganges y også med en konstant, nemlig $\frac{1}{k}$.

$y = \frac{3}{x}$

Hvad sker der med y hver gang x bliver dobbelt så stor?

x	1	2	4	8	16
y	3	1,5	0,75	0,375	0,1875
forhold		0,5	0,5	0,5	0,5

Når x bliver fordoblet bliver y halveret. Forholdet mellem to y værdier er $\frac{1}{2} = 0{,}5$, når x fordobles.

Når x fordobles er det nye x altså $2x$. Det sætter vi ind i $y = \frac{3}{x}$:

$y = \frac{3}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x}$

Her kan vi se, at det nye y er $\frac{1}{2}$ gang det gamle y.

Trekantens areal
Trekantens areal A kan beregnes ved formlen:
$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, hvor g er grundlinjen og h er højden ved denne grundlinje.

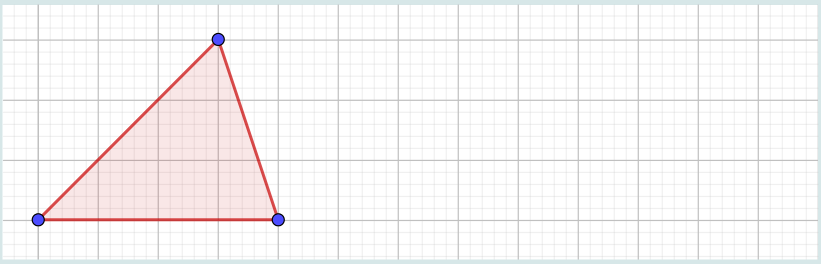
Der gælder både at

- når h øges med en konstant og g ikke ændres, så øges A med $\frac{1}{2} \cdot \text{konstanten} \cdot g$
- når h ganges med en konstant og g ikke ændres, så ganges A med samme konstant.

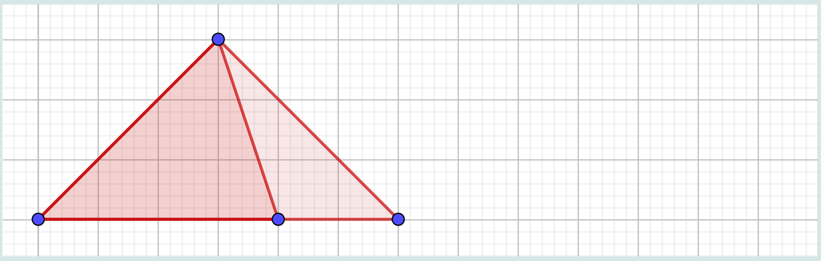
Der gælder tilsvarende at

- når g øges med en konstant og h ikke ændres, så øges A med $\frac{1}{2} \cdot h \cdot \text{konstanten}$
- når g ganges med en konstant og h ikke ændres, så ganges A med samme konstant.

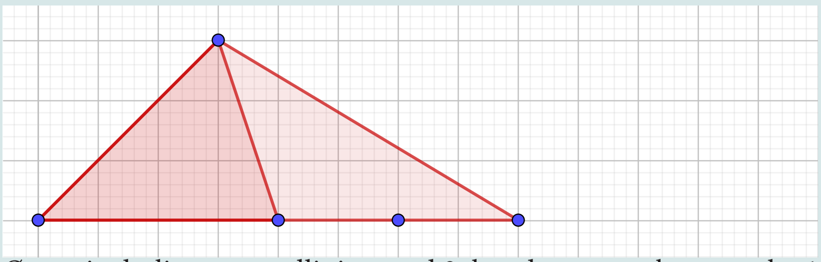
Vi tager udgangspunkt i denne trekant.



Hvad sker der med arealet hver gang grundlinjen bliver 2 længere, og højden er den samme?



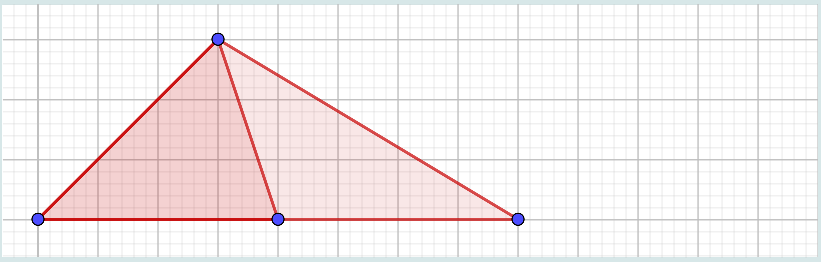
Ved at bruge GeoGebra ses at arealet af den lille trekant er 6, og arealet af trekanten med grundlinjen, der er 2 længere, er 9, altså øget med 3.



Øger vi yderligere grundlinjen med 2, har den nye trekant arealet 12, altså igen øget med 3.

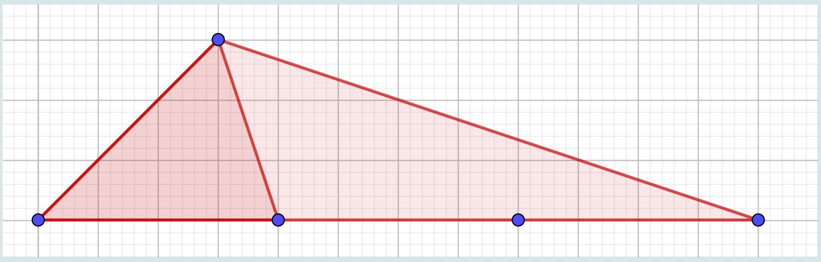
Når g øges med 2 er det nye g altså $g + 2$. Det sætter vi ind i
$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$
$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (g + 2) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g + \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2$. Her kan vi se, at det nye A er $\frac{1}{2} \cdot h \cdot 2$ lagt til det gamle A.
h er i dette tilfælde 3, så $\frac{1}{2} \cdot h \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

Hvad sker der med arealet, når grundlinjen bliver dobbelt så lang, og højden er den samme?



Ved at bruge GeoGebra ses, at arealet af den lille trekant er 6, og arealet af trekanten med den dobbelt grundlinje er 12, altså dobbelt så stort.

Hvis vi laver en ny trekant med en grundlinje der er tre gange den første grundlinje er arealet 18, altså 3 gange så stort som den lille trekant.



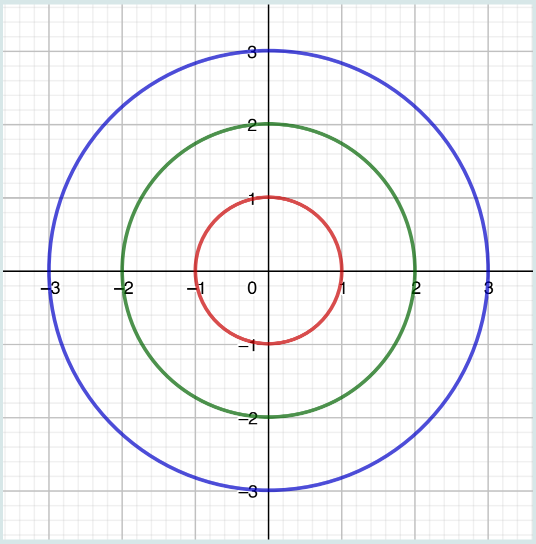
Når g fordobles er det nye g altså $2g$. Det sætter vi ind i $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$.
$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (2g) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$. Her kan vi se at det nye A er er 2 gange det gamle A.
Når g bliver 3 gange så lang er det nye g altså $3g$. Det sætter vi ind i udtrykket $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$
$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (3g) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$. Her kan vi se at det nye A er er 3 gange det gamle A.

Cirklens areal

Cirklens areal A kan beregnes ved formlen:
$A = \pi \cdot r^2$, hvor r er cirklens radius.

Der gælder at

- når r ganges med en konstant, så ganges A med konstanten i anden.



Radius af den midterste cirkel er det dobbelte af radius af den mindste cirkel. Radius af den største cirkel er 3 gange radius af den mindste cirkel.
Ved at bruge GeoGebra ses, at arealet af den lille cirkel er ca. 3,14, og arealet af cirklen med den dobbelt radius er ca. 12,57, altså 4 gange så stort.
Arealet af cirklen med en radius der er 3 gange den inderste radius er arealet ca 28,27, altså 9 gange så stort som den lille cirkel (bortset fra afrunding).

Når r fordobles er det nye r altså $2r$. Det sætter vi ind i $A = \pi \cdot r^2$.
$A = \pi \cdot (2r)^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$. Det nye A er $2^2 = 4$ gange det gamle A.
Når r bliver 3 gange så lang, er det nye r altså $3\ r$. Det sætter vi ind i $A = \pi \cdot r^2$.
$A = \pi \cdot (3r)^2 = 9 \cdot \pi \cdot r^2$. Det nye A er $3^2 = 9$ gange det gamle A.

Generelt

Generelt kan man undersøge relationerne mellem de variable i en formel eller en funktion ved at undersøge hvad der sker når en variabel øges med en konstant eller når en variabel ganges med en konstant. Dette undersøger man ved et erstatte x (eller hvad den ønskede variabel hedder) med hhv $x + k$ eller $k \cdot x$, hvor k er en konstant.

$y = \sqrt{x} + 5$

Hvad sker der med y når x fordobles?

x	1	2	4	8	16
y	6	6,41	7	7,83	9
forhold		1,07	1,09	1,12	1,15

x	0	10	20	30	40
y	5	8,16	9,47	10,48	11,32
forskel		3,16	1,31	1,01	0,85

Når x fordobles er det nye x altså $2x$. Det sætter vi ind i $y = \sqrt{x} + 5$.

$y = \sqrt{2x} + 5 = y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} + 5$. Det nye y er hverken er et tal ganget med det gamle y eller et tal lagt til det gamle y.

Når x øges med 10 er det nye x altså $x + 10$. Det sætter vi ind og får $y = \sqrt{x + 10} + 5$. Det udtryk kan ikke reduceres, og vi kan se, at det nye y er hverken er et tal ganget med det gamle y eller et tal lagt til det gamle y.