

Papirfoldning

en matematisk undersøgelse til brug i din undervisning.

Når man folder og klipper figurer kan man blive irriteret over at skulle vende og dreje saksen. Hvor få klip kan man mon nøjes med? Jeg har eksperimenteret med enkle figurer: trekanter og kvadrater, og gået videre til andre figurer. Når jeg var heldig eller god, kunne jeg folde papiret, så jeg kunne nøjes med ét klip. Var jeg heldig eller god?

Jeg har taget internettet til hjælp og fundet en fantastiske matematiske sætning, der siger, at alle kantede figurer kan foldes, så de kan klippes med ét lige klip. Det gælder, uanset om de er sammenhængende eller ej, konkave eller konvekse (dvs. både dem, der har dele, der vender indad, og dem, hvor alle hjørner vender udad). Et af beviserne for sætningen giver også en anvisning på en folde- og klippemetode. Det er ikke så nemt, men vejen dertil er fyldt med god matematik.

De følgende aktiviteter er en matematisk undersøgelse om at klippe kantede figurer med få klip målrettet hhv. indskoling, mellemtrin og udskoling. Side 8 - 13 er kopiark, som kan bruges til at klippe efter. På side 3 kan du finde oversigt over GeoGebrafiler med foldelinjer og andre vejledninger, som kan hentes fra vores hjemmeside: pindogbjerre.dk.

Rigtig god fornøjelse!



Pernille Pind



Forlaget Pind og Bjerre
Grenåvej 664C
8541 Skødstrup
bjerre@pindogbjerre.dk
Tlf.: 21 41 56 97

Forenklede Fælles Mål

Problembehandling:	Eleven kan løse enkle matematiske problemer.
Ræsonnement og tankegang:	Eleven kan give og følge uformelle matematiske forklaringer.
Placeringer og flytninger:	Eleven kan beskrive og fremstille figurer og mønstre med spejlingssymmetri.

Læringsmål til eleverne

Du skal kunne folde et stykke papir og klippe en figur, så når papiret foldes ud er det klippede hul et kvadrat.

Du skal kunne forklare, hvordan du vil folde og klippe, inden du gør det.

Du skal kunne bruge ordet spejlingsakse, når du fortæller om dine foldninger og klipninger.

Fold og klip et kvadrat (skabelon side 8)

Lad eleverne eksperimentere med at folde papiret og klippe, og se, om de kan klippe det grå kvadrat ud.

Man kan opfordre eleverne til at holde papiret op mod lyset, så de bedre kan se symmetrien.

Spørg ind til, hvor mange klip de skal bruge, og hvordan de folder.

Udfordringer

Kan man folde, så man kan nøjes med to klip?

Kan man folde, så man kan nøjes med ét klip?

Hint

Eleverne kan bruge diagonalerne. Diagonaler kan forklares som de linjer, der går på tværs af kvadratet, altså mellem hjørner, der er overfor hinanden.

Fold og klip to kvadrater (skabelon side 9)

Lad eleverne eksperimentere med at folde papiret og klippe, og se, om de kan klippe de to grå kvadrater ud.

Spørg ind til, hvor mange klip de skal bruge, og hvordan de folder.

Udfordringer

Kan man folde, så man kan nøjes med to klip?

Kan man folde, så man kan nøjes med ét klip?

Hint

Prøv først at folde, så de to kvadrater ligger ovenpå hinanden.

Fold og klip en ligesidet trekant (skabelon side 10)

Lad eleverne eksperimentere med at folde papiret og klippe, og se, om de kan klippe den grå trekant ud.

Spørg ind til, hvor mange klip de skal bruge, og hvordan de folder.

Udfordringer

Kan man folde, så man kan nøjes med to klip?

Kan man folde, så man kan nøjes med ét klip?

Filer til download og forslag til yderligere læsning

På pindogbjerre.dk/download ligger en række filer til gratis download.

GeoGebra-filer med eksempler på foldelinjer i:

- Kvadrat
- Ligesidet trekant
- Vilkårlig trekant
- Ikke-retvinklet konveks firkant

GeoGebra-filer til egne eksperimenter:

- Den skrumpende firkant
- Firkant

To PowerPoint-filer:

- Konstruktion af den skrumpende firkant
- Konstruktion af de sidste foldelinjer

Forslag til yderligere læsning om fold-and-cut theorem:

<http://erikdemaine.org/foldcut/>

https://en.wikipedia.org/wiki/Fold-and-cut_theorem

<http://wild.maths.org/history-fold-and-cut-problem>



Forenklede Fælles Mål

Problembehandling:	Eleven kan anvende forskellige strategier til matematisk problemløsning.
Ræsonnement og tankegang:	Eleven kan anvende ræsonnementer til at udvikle og efterprøve hypoteser.
Placeringer og flytninger:	Eleven kan undersøge geometriske egenskaber ved plane figurer. Eleven har viden om vinkelmål, linjers indbyrdes beliggenhed og metoder til undersøgelse af figurer, herunder med dynamisk geometriprogram.

Læringsmål til eleverne

Du skal kunne folde et stykke papir og klippe en figur, så når papiret foldes ud, er det klippede hul en trekant.

Du skal kunne forklare, hvordan du vil folde og klippe, inden du gør det.

Du skal kunne bruge begreberne spejlingsakse, vinkelhalveringslinje og vinkelret linje, når du fortæller om dine foldninger og klipninger.

Du skal kunne tegne en trekant med foldelinjer i GeoGebra.

Fold og klip et kvadrat (skabelon side 8)

Lad eleverne eksperimentere med at folde papiret og klippe, og se, om de kan klippe det grå kvadrat ud. Man kan opfordre eleverne til at holde papiret op mod lyset, så de bedre kan se symmetrien.

Spørg ind til, hvor mange klip de skal bruge, og hvordan de folder.

Udfordringer

Kan man folde, så man kan nøjes med to klip?

Kan man folde, så man kan nøjes med ét klip?

Hint

Eleverne skal bruge diagonalerne. Diagonaler kan forklares som de linjer, der går på tværs af kvadratet, altså mellem hjørner, der er overfor hinanden.

Fold og klip to kvadrater (skabelon side 9)

Lad eleverne eksperimentere med at folde papiret og klippe, og se, om de kan klippe de to grå kvadrater ud.

Spørg ind til, hvor mange klip de skal bruge, og hvordan de folder.

Udfordringer

Kan man folde, så man kan nøjes med to klip?

Kan man folde, så man kan nøjes med ét klip?

Hint

Prøv først at folde, så de to kvadrater ligger ovenpå hinanden.

Fold og klip en ligesidet trekant (skabelon side 10)

Lad eleverne eksperimentere med at folde papiret og klippe, og se, om de kan klippe den grå trekant ud.

Spørg ind til, hvor mange klip de skal bruge, og hvordan de folder.

Udfordringer

Kan man folde, så man kan nøjes med to klip?

Kan man folde, så man kan nøjes med ét klip?

Hint

Spejlingsakserne er vinkelhalveringslinjerne eller højderne, som i en ligesidet trekant er det samme. De tre vinkelhalveringslinjer skærer hinanden i ét punkt.

En trekant har ingen diagonaler.

Teori

Hvis man skal folde et stykke papir, så figuren kan klippes ud med ét klip, skal alle de linjer, der skal klippes, bringes til at ligge ovenpå hinanden. En foldelinje er en spejlingsakse.

Der findes to redskaber til at spejle linjer over i hinanden:

- Vinkelhalveringslinjen, der spejler en linje over i en anden linje
- Vinkelrette linjer, der spejler en linje over i sig selv

Fold og klip en vilkårlig trekant (skabelon side 11)

Lad eleverne eksperimentere med at folde papiret og klippe, og se, om de kan klippe den grå trekant ud.

Spørg ind til, hvor mange klip de skal bruge, og hvordan de folder.

Udfordringer

Kan man folde, så man kan nøjes med to klip?

Kan man folde, så man kan nøjes med ét klip?

Hint

Foldelinjerne skal være vinkelhalveringslinjerne og de vinkelrette linjer fra vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt til trekantens sider. De tre vinkelhalveringslinjer skærer hinanden i ét punkt. Ikke alle disse foldelinjer skal bruges.

Tegn foldelinjerne for en trekant i GeoGebra

Tegn en trekant i GeoGebra. Brug redskaberne vinkelhalveringslinje og vinkelret linje til at konstruere alle de mulige foldelinjer for trekanten.

Print figuren og prøv efter, om foldelinjerne virker.

Forenklede Fælles Mål

Ræsonnement og tankegang: Eleven kan udvikle og vurdere matematiske ræsonnementer, herunder med inddragelse af digitale værktøjer.

Placeringer og flytninger: Eleven kan undersøge egenskaber ved linjer knyttet til polygoner og cirkler, herunder med digitale værktøjer.
Eleven har viden om linjer knyttet til polygoner og cirkler.

Læringsmål til eleverne

Du skal kunne folde et stykke papir og klippe en figur, så når papiret foldes ud, er det klippede hul en firkant.

Du skal kunne forklare, hvordan du vil folde og klippe, inden du gør det.

Du skal kunne bruge begreberne spejlingsakse, vinkelhalveringslinje og vinkelret linje, når du fortæller om dine foldninger og klipninger.

Du skal kunne tegne en firkant med foldelinjer i GeoGebra.

Start med de 5 aktiviteter fra mellemtrinnet.

Fold og klip en ikke-retvinklet, konveks firkant (skabelon side 12)

Lad eleverne eksperimentere med at folde papiret og klippe, og se, om de kan klippe den grå firkant ud.

Spørg ind til, hvor mange klip de skal bruge, og hvordan de folder.

Udfordringer

Kan man folde, så man kan nøjes med to klip?

Kan man folde, så man kan nøjes med ét klip?

Konstruer foldelinjer i en ikke-retvinklet, konveks firkant

Som i en vilkårlig trekant skal man bruge vinkelhalveringslinjerne og de vinkelrette linjer fra vinkelhalveringslinjernes skæringspunkter til firkantens sider. Der er bare det nye problem, at i denne firkant krydser de fire vinkelhalveringslinjer ikke hinanden i ét punkt, som de gør i en vilkårlig trekant.

Eleverne skal derfor følge denne metode:

1. Tegn de fire vinkelhalveringslinjer, der går ind i firkanten.
2. Forestil dig, at din firkant skrumper ind langs med vinkelhalveringslinjerne.
3. På et tidspunkt, når din firkant er skrumpet et stykke ind, så rammer to af dens

Afsluttende trin

hjørner hinanden i et punkt. Dette punkt kalder vi et indre punkt.

4. Når firkanten er skrumpet ind som ovenfor, er det ikke længere en firkant, men en trekant. I den trekant skal man finde skæringspunktet mellem trekantens vinkelhalveringslinjer. Dette punkt kalder vi også et indre punkt.
5. Tegn et linjestykke mellem de to indre punkter. Dette linjestykke er en foldelinje.
6. Tegn vinkelrette linjer fra de to indre punkter til de tre af firkantens sider, der er tættest på. Disse linjestykker er også foldelinjer.
7. Vinkelhalveringslinjerne er også foldelinjer.
8. Ikke alle de vinkelrette linjestykker skal bruges.

På pindogbjerre.dk/download kan hentes filer, som gennemgår ovenstående konstruktion: "Konstruktion af den skrumpende firkant" og "Konstruktion af de sidste foldelinjer". Med GeoGebra-filen "Den skrumpende firkant" kan man selv skrumpere firkanten.

Tegn foldelinjerne for en firkant i GeoGebra

Åben GeoGebrafilen "Firkant" fra pindogbjerre.dk/download. Konstruer de manglende foldelinjer for firkanten.

Print figuren og prøv efter, om foldelinjerne virker.

Udfordring

Prøv med et rektangel.

Prøv med en konkav firkant.

Fold-and-cut theorem (skabelon side 13)

Der findes en matematisk sætning, der siger, at en vilkårlig kantet figur kan foldes og klippes i ét lige klip. Det er ret vildt! Princippet i beviset er den metode, som er beskrevet lige ovenfor.

Jeg har lavet en kattermaske til at folde og klippe. Jeg har sorteret blandt foldelinjerne, så kun de nødvendige er tilbage. De fuldt optrukne linjer er bjergfoldninger (vender opad), de stiplede linjer er dalfoldninger (vender nedad)













