

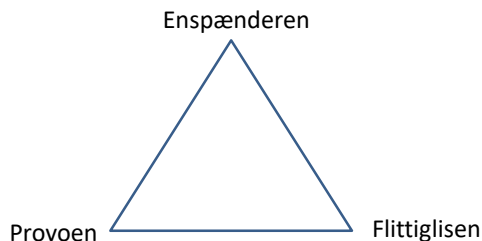
De dygtige til matematik

Hvordan genkender man dem?

Hvordan støtter man dem?

pindogbjerre.dk

Hvordan genkender man dem?



pindogbjerre.dk

Hvordan genkender man dem?

Enspænderen: Ikke særlig social med resten af klassen. Gør ikke et stort nummer af sig. Kan tendere det gammelkloge eller nørdede. Kan søge voksne frem for kammerater på deres egen alder. Kan have svært ved at forklare hvad de tænker, eller hvordan de har fundet løsningen på et matematisk problem. "Jeg gjorde det bare" er en typisk kommentar fra disse elever.

Flittiglisen: Flittig, pligttopfyldende og engageret. Elsker at hjælpe andre og elsker at forklare, hvad de har tænkt og, hvordan de har gjort.

Provoen: Kan virke sarkastisk og arrogant. Kan blive irriteret på andre elever, der har besvær med at forstå matematikken. Kører deres eget løb, der ikke altid er det samme som lærerens. Kan have ideer til problemløsning der kan virke helt skøre på andre mennesker. Gider ikke, eller har svært ved, at forklare hvad de tænker.

pindogbjerre.dk

Høj matematisk intelligens er ikke det samme som generel høj intelligens

Høj matematisk intelligens: Leder efter mønstre, sætter ting i system og bruger logiske argumenter.

Generel høj intelligens: Dygtig på en række områder, for eksempel både matematisk, sprogligt, rumligt og musisk. Elever med en generel høj intelligens er typisk nysgerrige, reflekterende og abstrakt tænkende.

pindogbjerre.dk

Hvorfor vælge matematik?

Matematik er objektivt , kulturuafhængigt og med kun lidt sprog

Man kan blive dygtig til matematik uden at vide, hvor Dybbøl Banke ligger. Det giver muligheder for børn fra ikke akademiske hjem og børn fra en anden kultur end den danske.

Naturvidenskab herunder i særdeleshed matematik er traditionelt første gangs akademikere på universiteterne.

pindogbjerre.dk

Hvorfor vælge matematik?

Matematik har høj status.
Matematik er udfordrende.
Matematik kan bruges i mange fag.

pindogbjerre.dk

Hvorfor *ikke* vælge matematik?

Matematik er nørdet.
Matematik er kedeligt.

pindogbjerre.dk

Hvordan støtter man de, der er interesserede i matematik?

1. Mere faktiskt viden
2. Sværere problemer
3. Ekspertrolle
4. Underviser
5. Udfordre sig selv

pindogbjerre.dk

Mere faktuel viden

Lad dem selv sætte sig ind i flere begreber og flere faktuelle ting i matematik.

Lad dem læse Illustreret videnskab, Anker Tiedemanns bøger og mine Læs selv- matematik bøger.

pindogbjerre.dk

Sværere problemer

Man kan give de dygtige elever sværere opgaver, hvor løsningen kræver matematisk kreativitet, for eksempel at eleverne kombinerer kendt matematik på en usædvanlig måde.

Hvis de svære opgaver alene kræver meget arbejde, betyder det ofte at de dygtige elever prøver at undgå at få disse, da de finder dem kedelige.

pindogbjerre.dk

Ekspertrolle

Alle elever lærer lidt trigonometri, lidt om konstruktion med passer og lineal, lidt hovedregning, lidt regneark og lidt bogstavregning.

Mange områder har potentiale til at udfordre de dygtige elever, så de kan blive eksperter på området.

De kan blive de rene opslagsværker i trigonometri, ferme til at konstruere med passer og lineal, supergode til at bruge regneark eller de rene bogstavjonglører.

pindogbjerre.dk

Underviser

Endelig er det at undervise andre en god måde selv at lære noget på.

De dygtige elever kan udfordres ved at skulle hjælpe andre i klassen.

De kan også blive bedt om at fremlægge noget, de selv har sat sig ind i for hele klassen.

pindogbjerre.dk

Udfordre sig selv

Den vigtigste måde at udfordre de dygtige elever er at lære dem at udfordre sig selv!

En matematikopgave er ikke færdig, bare fordi den er løst. Enhver opgave er starten på en **matematisk undersøgelse**.

”De matematiske løft”

1. Kan man løse opgaven på en **anden måde**?
2. Hvordan vil opgaven se ud med **andre tal**: større tal, mindre tal, negative tal eller brøker?
3. Kan man finde en **generel** formel for opgaver af denne type?

pindogbjerre.dk

Kontekst - åbenhed



pindogbjerre.dk

Små skridt

Der er langt fra træning til projekter. Der er en tendens til at springe mellem de to – mellem det meget lukkede og det meget åbne.

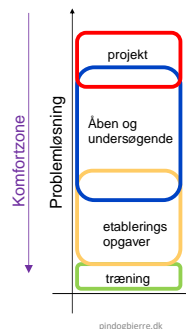
Mange tabes i de store spring.

Tag små skridt, start i nederste venstre hjørne af det blå felt. Kun lidt åben og med kun lidt kontekst.

Med Vygotskys ord: ”Zonen for nærmeste udvikling”

pindogbjerre.dk

Problemløsningsaksen



pindogbjerre.dk

Hold i hånden

Det er trykkest at være i hjørnet med træningsopgaver.

Men ny læring kræver, at man bevæger sig ud af det felt.

Hold eleverne i hånden jo længere væk fra det grønne hjørne, I bevæger jer.

pindogbjerre.dk

Åbne opgaver

En opgave er åben, når der er flere mulige svar.

pindogbjerre.dk

Hvorfor åbne opgaver?

Undervisningsdifferentiering

Faglig inklusion

Virkeligheden er åben

Modvirker matematikangst

Mere effektiv læring

pindogbjerre.dk

Undervisningsdifferentiering

Når opgaven er åben, er elevernes egne valg med til at afgøre indholdet af opgaven, herunder sværhedsgraden.

Lærerens støtte starter altid med: "Hvad er det, du har valgt at se på?"

pindogbjerre.dk

Faglig inklusion

En lukket opgave har ét rigtigt svar, det kan én elev få lov at sige.

En åben opgave har mange rigtige svar, her er der mange elever, der kan få lov at sige noget.

Det er interessant at høre andres svar – det kunne jo være, de var mere spændende end ens eget.

pindogbjerre.dk

Virkeligheden er åben

Kun i skolens matematiktimer er der lukkede matematikopgaver – udenfor skolen er man altid selv med til at afgøre, hvad man regner på.

pindogbjerre.dk

Modvirker matematikangst

Matematikangst næres bl.a. af frygten for at regne forkert.

I lukkede matematikopgaver føles muligheden for at regne rigtigt lille, og muligheden for at regne forkert stor.

Med åbne opgaver er rummet for det rigtige udvidet markant.

pindogbjerre.dk

Mere effektiv læring

De store ord fra 90'erne:

- Konstruktivistisk læringsteori
- Metakognition
- Ansvar for egen læring

pindogbjerre.dk

Hvorfor åben?

I de nye Forenklede Fælles mål:

- 34 hits på søgning på "undersøg"

I undervisningsvejledningen:

- 71 hits på søgning på "undersøg"
- 15 hits på søgninger på "åben"/"åbne"

pindogbjerre.dk

Udfordringer

Mangel på opgaver

Lærerens faglige usikkerhed

Ny didaktisk kontrakt

pindogbjerre.dk

Ny didaktisk kontrakt

Det er godt at fordybe sig og blive i samme opgave længe.

Det er godt at stille flere spørgsmål.

Man må godt lave om på opgaverne.

Det er godt at komme med mange svar. Men det handler ikke om at lave flest.

Det er godt at komme med forskellige slags svar.

Det er godt at bygge videre på andres svar.

pindogbjerre.dk

Tre forskellige svar

Et almindeligt

Et vanskeligt

Et smart!

pindogbjerre.dk

De tre forskellige svar

Pointen er IKKE, at læreren skal afgøre om ens svar er A(Imindeligt), V(anskeligt) eller S(mart).

S er ikke finere end A eller V.

Hver elev skal anstrenge sig for at finde flere og forskellige slags svar.

Når svarene diskuteres, er der ingen grund til at vurdere om de er A, V eller S. Mærkaterne er private og primært en hjælp til at udfordre eleverne.

pindogbjerre.dk

Regnestykker med resultatet 100

Almindelige

$$50 + 50$$

$$60 + 40$$

Vanskelige

$$60 + 40$$

$$100,01 - 0,01$$

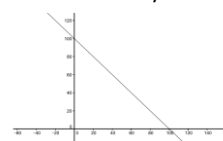
$$20 \cdot \sqrt[3]{125}$$

Smarte

$$100 + 0$$

$$100 : 1$$

Alle punkter på grafen
 $y = 100 - x$ har $x + y = 100$



pindogbjerre.dk

Læreren må gerne udfordre

Udfordringer kan være:

- Andre tal: større, mindre, decimaler, negative, brøker, rødder
- Andre regnearter – flere regnearter og parenteser
- Brug variable og gør svaret generelt
- Lav en kontekst

pindogbjerre.dk

6 typer opgaver i åben og undersøgende matematik

Svaret er givet

Manglende oplysninger

Undersøgelser

Modellering

Regnehistorier

Nye begreber

pindogbjerre.dk

Svaret er givet

"Svaret er givet" er matematisk Jeopardy. Vi starter med et svar, og finder på, hvad spørgsmålet kunne være.

Vender kendte sammenhænge om, så forståelsen af de matematiske områder udvides.

En smadder nem måde at lave uendelig mange åbne opgaver!

pindogbjerre.dk

Svaret er givet - eksempel

"Lav algebraiske udtryk der kan reduceres til $3a$."

Metode:

- Almindelig
- Vanskelig
- Smart

pindogbjerre.dk

Svaret er givet - eksempel

"Tegn firkanter med en diagonal på 10 cm."

Metode:

- Almindelig
- Vanskelig
- Smart

pindogbjerre.dk

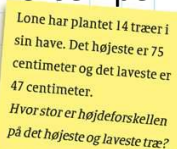
Manglende oplysninger

Brug kendte opgaver og fjern oplysninger.

Elevernes forståelse af matematikken udvides, ligesom deres forståelse af matematikopgavernes sprog og struktur udvides.

pindogbjerre.dk

Manglende oplysninger - eksempel



Lone har plantet 14 træer i sin have. Det højeste er 75 centimeter og det laveste er 47 centimeter.
Hvor stor er højdeforskellen på det højeste og laveste træ?

Metode:

Vælg de manglende oplysninger.

Løs opgaven med de fastlagte oplysninger.

- Almindelig
- Vanskelig
- Smart

pindogbjerre.dk

Undersøgelser

En undersøgelse er karakteriseret af spørgsmålet:

”Hvad nu hvis?”

Man starter ét sted, og stiller spørgsmål der åbner problemstillingen og leder én andre steder hen.

pindogbjerre.dk

Undersøgelser - eksempel

Startskud: ”Her er et regnestykke: $44 + 31 = 66$. I kan nok ret hurtig se, at det ikke passer. Jeres opgave er at få det til at passe. Alle cifre skal laves netop én større eller én mindre.

Man kan for eksempel prøve $55 + 42 = 75$. Her er de første fem cifre fra opgaven alle gjort én større og det sidste ciffer i opgaven er gjort én mindre. Men det passer stadig ikke. Kan I få det til at lykkes?”

pindogbjerre.dk

Undersøgelser - eksempel

Startskud: ”Tegn en syv-takket stjerne i en streg, altså uden at løfte blyanten fra papiret.”

pindogbjerre.dk

Undersøgelser - eksempel

Startskud: Læreren laver en stang af to forskellige farver Centicubes, der f. eks. er 10-12 Centicubes lang, med et bestemt mønster i farverne.

Startskuddet til eleverne er: "Hvilken farve far Centicube nummer 25?"

pindogbjerre.dk

Undersøgelser - eksempel

Metode:

Startskuddet: Eleverne løser den stillede opgave individuelt, i par eller i små grupper.

Udvidelsen: Åben opgaven og formuler i fællesskab udvidelsesspørgsmål.

Laboratoriearbejdet: Eleverne går sammen i små grupper og arbejder med et eller flere udvidelsesspørgsmål. Resultater formuleres skriftligt, så de kan deles med hele klassen.

Konklusion: Resultaterne gennemgås og diskuteres, og der drages fælles konklusioner.

pindogbjerre.dk

Modellering

Matematisk modellering er matematik anvendt til at beskrive og forudsige elementer af den verden, vi er en del af.

Matematisk modellering karakteriseres ved udsagnet:

"Det kommer an på"

Det kommer an på, hvilke elementer af verden vi tager med, det kommer an på, hvordan vi regner på dem, det kommer an på hvilke tal, vi bruger og ...

pindogbjerre.dk

Modellering - fortsat

Matematisk modellering kræver, at der er tre ting, der skal være opfyldt:

- Det skal indeholde matematik
- Det skal handle om noget uden for matematikken
- Spørgsmålet "hvor godt passer det til virkeligheden?" skal være interessant

pindogbjerre.dk

Modellering - eksempel

Hvor meget fylder et håndklæde?

pindogbjerre.dk

Modellering - eksempel

Metode:

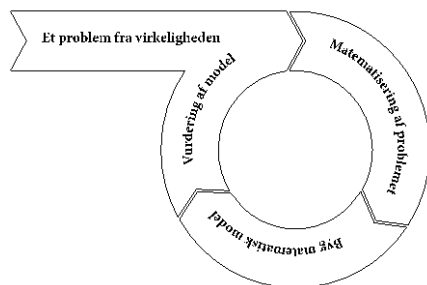
Eleverne skal arbejde i mindre grupper.

- **Matematiser problemet.** I første omgang meget simpelt.
- **Byg en model og løs opgaven** ud fra den givne model.
- **Vurder modellens resultat.**
- **Forfin modellen og gentag.**

Gruppernes resultater diskuteres fælles.

pindogbjerre.dk

Modellering



pindogbjerre.dk

Regnehistorier

Når eleverne laver regnehistorier (dvs. selv laver tekstopgaver i matematik), udvikles deres forståelse af matematikken, specielt forståelsen af de fire regningsarter.

De bliver bedre til at genkende de fire regningsarter i andre tekstopgaver, og de bliver bedre til at bruge regningsarterne i deres eget liv.

pindogbjerre.dk

Regnehistorier - eksempel

Skriv en minushistorie med ordet mere.

Metode:

Læreren giver et eksempel og eleverne laver tre regnehistorier.

- Almindelig
- Vanskelig
- Smart

pindogbjerre.dk

Nye begreber

Eleverne sættes til at give et volapykoord (opfundet af læreren) et matematisk indhold.

Eleverne skal skrive et par sider til en matematikbog om emnet, med eksempler, definition, regler, forklaring, metoder og opgaver.

På denne måde arbejder eleverne med vigtige matematiske begreber som definitioner, sætninger og beviser. Og eleverne udfolder konkret matematik efter deres egen fantasi.

pindogbjerre.dk

Nye begreber - eksempel

"Plinus"

Metode:

De ord, som det nye begreb består af, gennemgås fælles.

Eleverne skal i mindre grupper

- nedskrive en definition af begrebet
- lave et eksempel
- skrive en uddybende tekst
- lave opgaver med det nye begreb
- opfinde regler, formler eller metoder, og argumentere for deres gyldighed

Efter gruppearbejdet fremlægges og diskuteres gruppernes resultater, hvilket ofte giver anledning til justeringer.

pindogbjerre.dk

Åben og undersøgende

Ikke al matematikundervisning kan være åben og undersøgende, men rigtig rigtig meget kan.

Det vil give bedre matematikere og bedre borgere, der er mere parate til at regne på verden omkring sig.

pindogbjerre.dk

Værdifulde vaner

Vær systematisk

Gennemgå mulighederne på en struktureret måde.

Man opnår:

- Alle muligheder
- Kun en gang
- Overblik – opdage mønstre.

Systematik understøttes af:

- Tabeller
- Skemaer
- Tælletræer

pindogbjerre.dk

Værdifulde vaner

Brug notation

Notation er særlige symboler eller forkortelser.

Man opnår:

- Øget overskuelighed

Notation er fx:

- Brug af bogstaver i stedet for navne
- Brug af bogstaver i stedet for tal
- Brug af symboler. Både egne og fælles.

pindogbjerre.dk

Værdifulde vaner

Undersøg forskellige synsvinkler – vær kreativ

Kreativiteten understøttes af forskellige repræsentationer af problemet fx:

- Forskellige formuleringer
- Forskellige former for notation
- Fysisk repræsentation
- Dramatisering
- ...

Kun fantasien sætter grænsen!

pindogbjerre.dk

Strategier

Gæt og prøv efter
Reducer problemet
Vær konkret
Luk åbne problemer
Udtøm alle muligheder
Et skridt ad gangen
Optrævling
Brug logik
Opstil og løs ligninger

pindogbjerre.dk

Strategier

Gæt og prøv efter

Man kan gætte på en løsning, og prøve om den giver korrekte løsninger. Man kan kvalificere sine gættelser hen ad vejen.

Gæt og prøv efter er altid en god start, da man lærer problemet bedre at kende.

Kræver systematik!

pindogbjerre.dk

Strategier

Reducer problemet

Løs et nemmere problem, det giver ideer til det oprindelige problem.

- Nemmere tal
- Færre skridt
- Færre variable

pindogbjerre.dk

Strategier

Vær konkret

Nogle problemer forstås bedre, hvis man dramatiserer problemet som et lille skuespil med aktører, replikker og konkrete materialer.

Andre gange kan brug af konkrete materialer eller tegning hjælpe problemløsningen.

pindogbjerre.dk

Strategier

Luk åbne problemer

Tilføj manglende oplysninger, hvis problemet er åbent eller generelt.

Vælg helst manglende oplysninger der gør udregningerne nemme.

pindogbjerre.dk

Strategier

Udtøm alle muligheder

Ved problemer med begrænsede løsningsmuligheder, kan man finde alle de mulige løsninger og undersøge dem én for én.

Kræver systematik!

pindogbjerre.dk

Strategier

Et skridt ad gangen

I mange klassiske matematiske problemer er det muligt at starte med startbetingelserne og ved hjælp af matematik og logik deducere sig gennem problemet, skridt for skridt.

”Hvis det her gælder, så medfører det, at det her gælder.”

pindogbjerre.dk

Strategier

Optrævling

Start bagfra og trævl problemet op ved at tage et skridt ad gangen og bruge delresultatet til næste skridt.

Mange problemer, der er baseret på rekursion (gentage en procedure på sig selv), kan løses med optrævling.

pindogbjerre.dk

Strategier

Brug logik

I mange problemer skal man bruge den helt basale logiske regel, at et udsagn enten er sandt eller falsk – ikke begge dele.

Lyder banalt, men det er ikke altid let at gennemskue, om man kan udelukke det ene og dermed konkludere det andet.

pindogbjerre.dk

Strategier

Opstil og løs ligninger

Problemers oplysninger og sammenhænge kan ofte samles i en eller flere ligninger. Man skal finde ud af, hvilke ubekendte man har, og hvordan de hænger sammen.

Når ligningerne er stillet op, kan de løses med elektroniske hjælpemidler eller traditionelle ligningsløsningsmetoder.

pindogbjerre.dk

Differentiering

Lettere variationer

Læreren kan lave lettere variationer af et problem.

Læreren kan vælge at give denne lettere variant til enkeltelever.

Man kan gøre det nemmere ved:

- Nemmere tal
- Færre tal/skridt
- Flere oplysninger
- Lukke problemet

pindogbjerre.dk

Differentiering

Løft problemet

Læreren kan løfte problemet for de hurtige elever.

Man kan give et problem et matematisk løft ved:

- Sværere tal
- Flere skridt
- Åbne problemet
- Undersøge om der er andre løsninger
- Løse problemet generelt

Eleven kan lære selv at lave de matematiske løft.

pindogbjerre.dk