Fra tilfældighed over fraktaler til uendelighed

Dette undervisningsforløb har jeg lavet til et forløb på UCC Nordsjælland for særligt interesserede elever i 8. klasse. Alt, der står med rødt, er henvendt til læreren. På www.pernillepind.dk kan du hente en version af materialet, som kan uddeles til eleverne.

Tilfældighed

Hvor tilfældige kan vi være?

I skemaet ved siden af skal du sætte 0'er og 1-taller, ét tal i hvert felt. Der er 50 felter. Du skal prøve at sætte dem så tilfældigt som muligt

Når alle har udfyldt skemaet, skal vi vurdere, hvor gode I har været til at være tilfældige.

Opgave 1

Hvis nu du har været god til at være tilfældig, hvilken fordeling af 0'er og 1'er skulle man så forvente?

	0	1
Forventet	50% 25	50% 25
Optalt		

Regn holdets gennemsnit ud

Opgave 2

Men man kan også se på mere end et tal ad gangen. Man kan se på strenge af længden to, og igen udregne den forventede fordeling og sammenligne med den fordeling du faktisk har.

49 par i alt

	00	01	10	11
Forventet	25% 12-13	25% 12-13	25% 12-13	25% 12-13
Optalt				

Regn holdets gennemsnit ud

Opgave 3

Lav nu selv skema over forventet og optalt fordeling for strenglængde 3.

48 3-strenge i alt

	000	001	010	011	100	101	110	111
Forventet	12,5% 6	12,5% 6	12,5% 6	12,5% 6	12,5% 6	12,5% 6	12,5% 6	12,5% 6
Optalt								

Fra Tilfældighed til Fraktaler

Et tilfældigt mønster

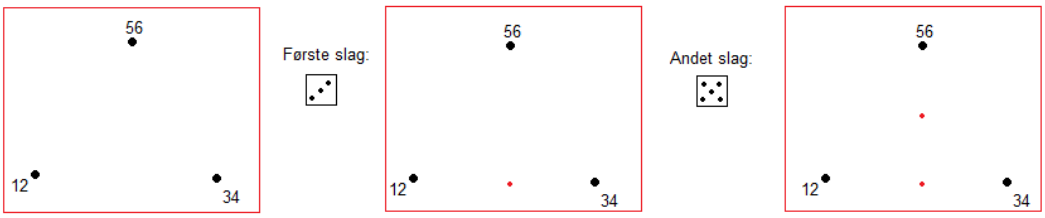
Du skal til denne øvelse bruge en spids blyant, en almindelig 6-sidet terning og en lineal.

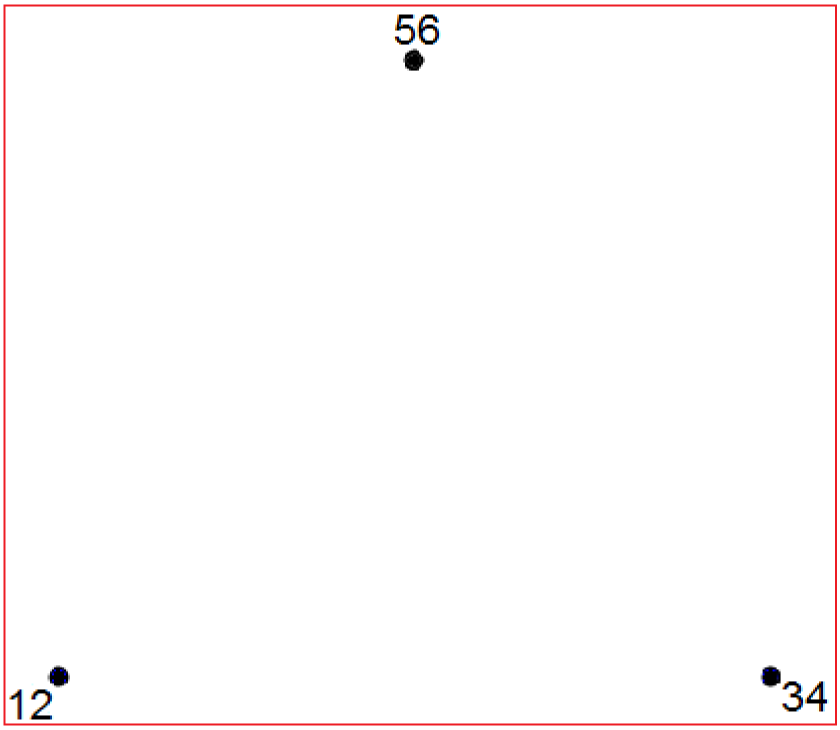
Nedenfor er der tegnet tre hjørnepunkter i en ligesidet trekant. De tre hjørnepunkter har navnene 12, 34 og 56. Du skal nu slå med en terning, terningen afgør, hvor du skal flytte blyanten hen og sætte en prik.

Start med at sætte din blyant i hjørnepunktet 12.

- Slå med terningen.
- Flyt din blyant hen til midt mellem, der hvor du står og hjørnepunktet, hvori terningeslaget indgår.
- Fortsæt på denne måde.

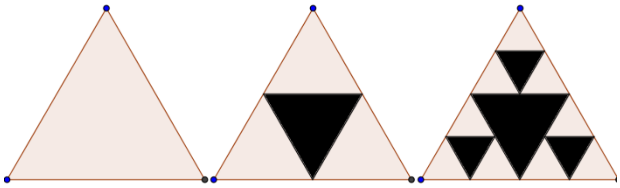
Hvis de(t) første terningeslag ikke giver anledning til at flytte blyanten, slår du bare igen.
Vær omhyggelig og præcis.
Du skal fortsætte i 10 minutter, eller indtil du har set et mønster i hvor prikkerne kan ramme. Der er ret store områder, som aldrig kan blive ramt.
Eksempel:





Fraktaler

Afslør nu for eleverne at ovenstående vil ende med at danne Sierpinksis Si. Diskuter hvilke områder, der ikke kan rammes af blyantsprikker. Lad eleverne tegne de to-tre første iterationer (dvs. trin) af Sierpinksis Si ind i ovenstående trekant, og skraver de ”umulige” områder. På den måde kan eleverne se at prikkerne ligger i de ”mulige” områder. Sierpinskis Si dannes ved, at der i hver iteration tegnes fire trekanter i de eksisterende trekanter, og den midterste trekant fjernes.



1. iteration 2. iteration

Von Kochs snefnug

Von Kochs snefnug er en anden fraktal. Den skal du også tegne.

Tegn et linjestykke.

Del linjestykket op i tre lige store stykker.

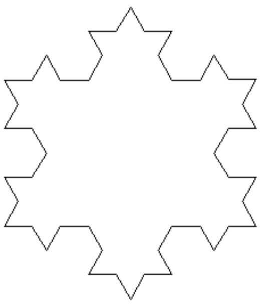
Ved det midterste stykke af linjestykket tegnes en ligesidet trekant med det midterste stykke som den ene side. Til sidst visker man bundlinjen af trekanten ud.

1. iteration

Fortsæt denne procedure ved alle de linjestykker der opstår.

2. iteration

Ved at sætte tre Von Kock fraktaler sammen, dannes det man kalder Von Kocks snefnug.



Opgave 4

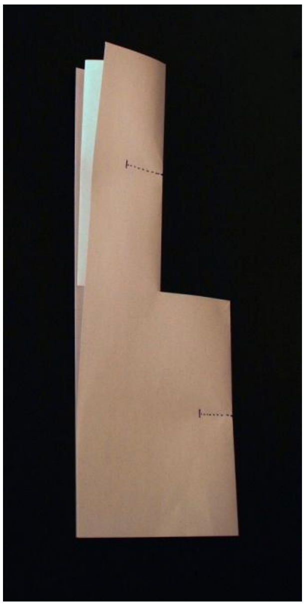
Snefnugget vokser og vokser, men det bliver ikke uendelig stort. Prøv at tegne en figur udenom snefnugget, som snefnugget aldrig kommer ud over.

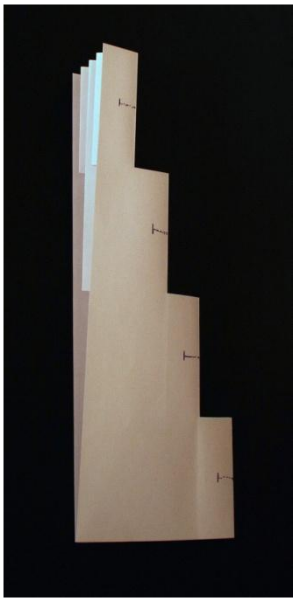
Pop-up fraktaler

Den første pop-up fraktal

Man kan klippe eller skære pop-up figurer, der ligner fraktaler.

Følg mine klippe- og foldeanvisninger.



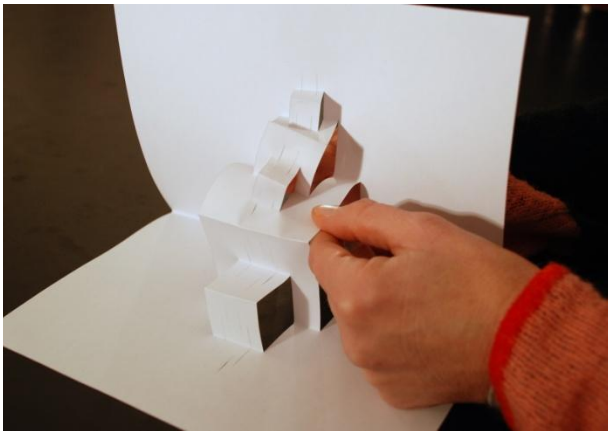
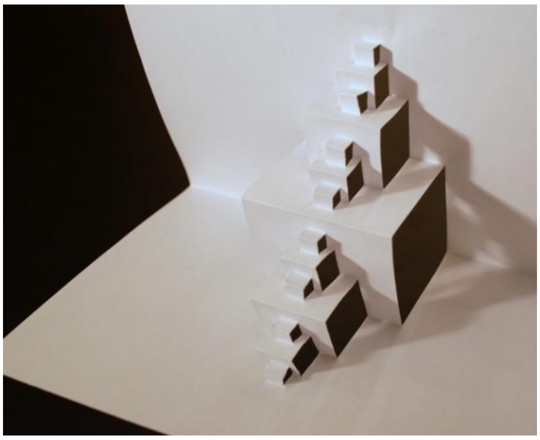
Du skal klippe mindst 3 iterationer. Hvilken fraktal ligner denne pop-up?

Forhåbentlig kan eleverne se at det ligner Sierpinskis Si, hvis ikke bliver det tydeligere ved flere iterationer

Fraktaltrappen

Skær fraktaltrappen.

Tag arket med mine fortrykte skære- og foldelinier. Skær først og fold derefter. Brug fotografierne til at finde ud af, hvordan der skal foldes.

Opgave 5

Hvor mange trin har Fraktal Trappen? 1+2+4+8=15

Opgave 6

Hvor mange trin skulle du skære i næste omgang, hvis du altså skulle fortsætte mønsteret? 2*8=16

Hvor mange trin ville der så være i alt? 15+16=31 eller 1+2+4+8+16=31

Opgave 7

Udfyld skemaet:

	Antal trin, der skæres i denne omgang.	Antal trin, der så er alt i alt.
1. omgang	1	1
2. omgang	2	3
3. omgang	4	7
4. omgang	8	15
5. omgang	16	31
n'te omgang	2^{n-1}	$2^n - 1$

Et bevis for $2^n - 1$. Kun de allerskarpeste kan forstå det:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$$

$$2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

$$2S - S = S = 2^n - 2^0 = 2^n - 1$$

Lidt om fraktaler

Fraktaler er geometriske former, der ikke alene kan beskrives ved traditionelle former som cirkel, kantformet eller lignende.

Fraktalformerne genfindes i naturen i fx bregner og blomkål. Ideen er, at man hele tiden kan gå tættere og tættere på og hele tiden blive ved med at se nye krinkelkroge ligegyldigt hvor længe man bliver ved. Det er en fraktal.

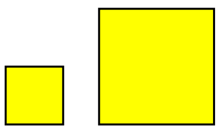
Mange fraktalformer kan beskrives ved følgende tre ting:

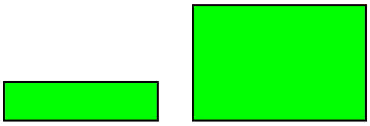
- de er selvligedannede
- de er formet ved iteration
- de har ikke heltallige dimensioner

Selvligedannet

At to figurer er ligedannede betyder, at den ene kan forstørres (som på en kopimaskine) så den præcis ligner den anden.

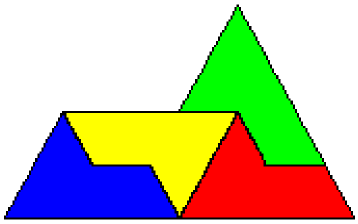
Fx er disse to figurer ligedannede:



Mens disse to figurer ikke er: 

At en figur er selvligedannet betyder at figuren selv er bygget op af mindre figurer, hvor de mindre figurer er ligedannede med den store figur.

Fx er følgende figur selvligedannet, men ikke en fraktal:



At en figur er selvligedannet betyder altså ikke nødvendigvis, at den er en fraktal.

Formet ved iteration

Mange fraktaler er lavet ved en iterativ proces. Iteration betyder at ”gentage på sig selv”. Fraktaler opstår, når hver iteration ”komplicerer” den forrige.

Nedenfor ses en fraktal som er lavet ved følgende iteration: Del et linestykke i tre og fjern den midterste del, og fortsæt på denne måde. Fraktalen hedder **Cantors støv**.

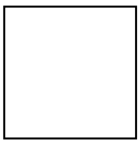
Ikke heltallige dimensioner

Et punkt siges at have dimension 0, et linjestykke har dimension 1, et stykke papir har 2 dimensioner, en mursten har 3 dimensioner – og flere dimensioner findes ikke i den fysiske verden.

Mange fraktaler kan have dimensioner der ligger mellem disse, fx 1,27 eller 2,5. En dimension på 1,27 kan forstås på den måde, at det egentlig er et linjestykke (med dimension 1) der bliver krøllet så meget sammen, at den efterhånden får lidt figur – bliver lidt tykkere, så den nærmer sig noget 2-dimensionalt.

Dimensioner som vi kender dem

Opgave 8:



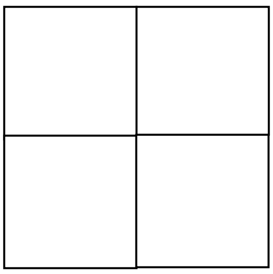
Dette kvadrat har kantlængde 1 og størrelse 1.

Hvad er det mindste antal af disse kvadrater der skal sættes sammen for at danne et større kvadrat? 4

Opgave 9

Størrelsen af en figur siges at være det antal gentagelser (små figurer) der danner figuren.

Hvad er størrelsen af denne figur? 4



Opgave 10
Hvad er kantlængden på denne figur? 2

Opgave 11
Forstørrelsesfaktor (F) fås ved at dividere den nye kantlængde med den gamle kantlængde.

F= ny kantlængde : gammel kantlængde

Hvad er forstørrelsesfaktoren F mellem ovenstående kvadrater? F=2:1=2

Opgave 12
Størrelsesforhold (S) fås ved at dividere den nye størrelse med den gamle størrelse.

S= ny størrelse : gammel størrelse

Hvad er størrelsesforholdet S mellem ovenstående kvadrater? S=4:1=4

Opgave 13
Lav nyt kvadrat med kantlængde 3.

Find forstørrelsesfaktor F og størrelsesforholdet S mellem det første kvadrat og dette nye kvadrat.

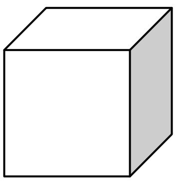
F=3:1=3 S=9:1=9

Opgave 14
Hvilken sammenhæng er der mellem S og F? $S = F^2$

Opgave 15
En figur har dimensionen d når og kun når: $F^d=S$

Hvilken dimension har kvadrater? 2

Opgave 16



Denne kube (terning) har kantlængde 1 og størrelse 1.

Hvad er det mindste antal af disse kuber der skal sættes sammen for at danne en større kube? 8

Opgave 17
Find F og S F=2:1=2 S=8:1=8

Opgave 18
Tænk på (eller lav den med terninger) en ny kube med kantlængde 3.

Find forstørrelsesfaktor F og størrelsesforholdet S mellem den første kube og denne nye kube.

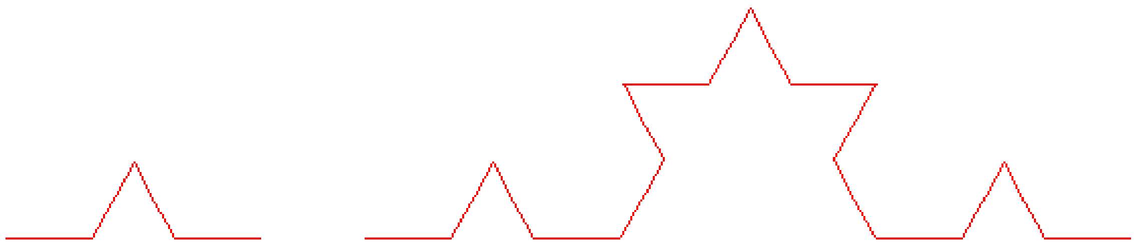
F=3:1=3 S=27:1=27

Opgave 19
Hvilken sammenhæng er der mellem S og F? $S = F^3$

Opgave 20
Brug definitionen af dimension til et bekræfte at en kube har dimension 3. $S = F^d$

Fraktaldimensioner
Forstørrelsesfaktoren F skal nu beregnes på følgende måde: Hvor meget skal den nye figur forstørres, så den indeholder en kopi af den gamle figur.

Eksempel: Her er 1. iteration og 2. iteration af Von Kocks fraktal.



2. iteration forstørres nu så den indeholder en kopi af 1. iteration:

Vi ser, at vi må forstørre med faktor 3. Hver kantlængde i forstørrelsen bliver 3 gange så lang, som den var før. Dvs. F=3

Størrelsesforholdet S findes ved at tælle hvor mange gange den gamle iteration er at finde i den nye iteration. I Von Kock er S=4

Vi skal nu løse ligningen $4 = 3^d$ for at finde dimensionen d. Dimensionen bliver ikke et helt tal.

Man kan bruge sin lommeregner og ”opløftetasten” (som enten er ^ eller y^x) til at finde dimensionen ved at prøve sig frem. Man kan også anvende en logaritmefunktion til at finde dimensionen d. På din lommeregner hedder den funktionstast måske ”log”.

For at løse ligningen $S = F^d$ skal man bruge logaritmefunktioner $d = \frac{logS}{logF}$.

For Von Kock fraktalen er S=4 og F=3, så dimensionen d findes ved:

$$d = \frac{log4}{log3} = 1.2618595071429 \approx 1,262$$

Opgave 21
Find dimensionen af Sierpinskis Si. Det vil sige find F, S og til sidst d. Prøv først at vurdere dimensionen af Sierpinskis Si.

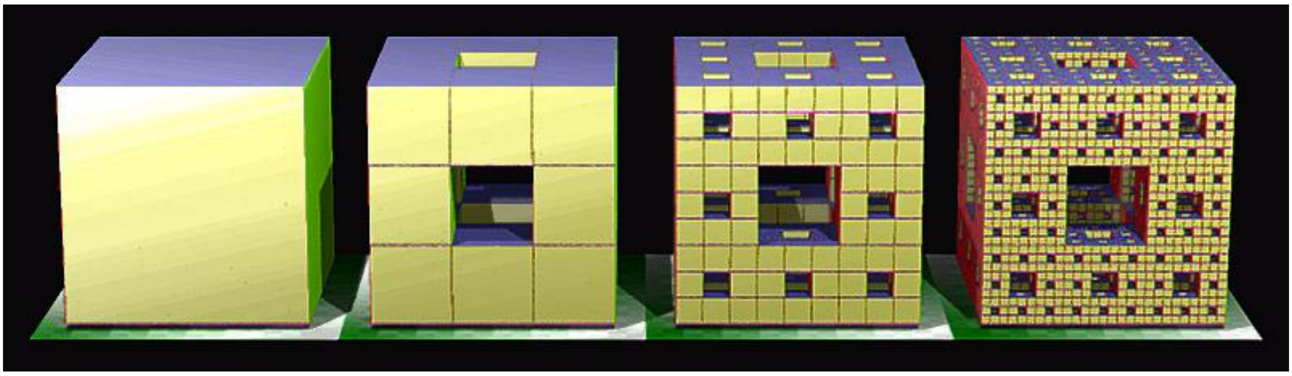
F=2, S=3, d=1,585

Opgave 21
Find dimensionen af Cantors Støv. Prøv først at vurdere dimensionen af Cantors Støv.

F=3, S=2, $2 = 3^d$, d=0,631

Opgave 23
Mengers Svamp er også en fraktal. Den dannes ved at starte med en kube (en terning).

Ved hver iteration deler man kuberne (første gang er der kun en kube) op i 3x3x3=27 mindre, lige store kuber. Man fjerner de midterste kuber på hver flade, og man fjerner også kuben helt inde i midten. Sådan fortsætter man.

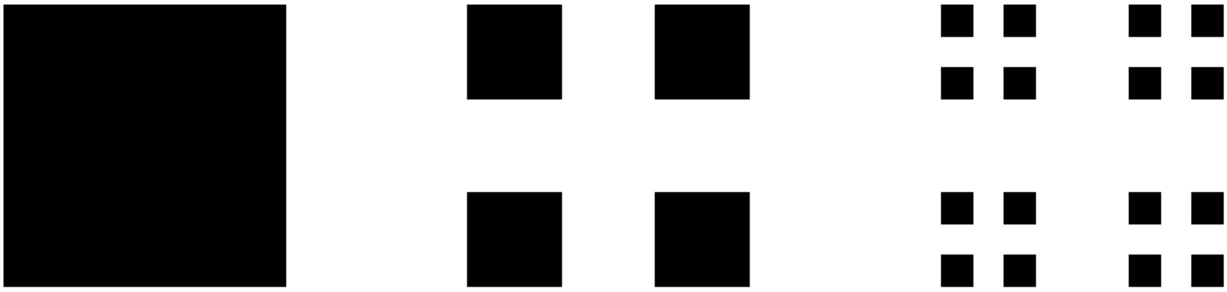


Find dimensionen af Mengers Svamp. Prøv først at vurdere dimensionen af Mengers svamp.

F=3, S=20, $20 = 3^d, d = 2.7268330278608 \approx 2{,}73$

Opgave 24
Denne fraktal har ikke et officielt navn, men vi kan jo kalde den Mengers Si.

Man starter med et kvadrat. Ved hver iteration deler man kvadraterne (første gang er der kun et kvadrat) i 3x3=9 mindre lige store kvadrater. Så fjerner man det midterste kvadrat på hver side og kvadratet i midten. Og sådan fortsætter man.



Find dimensionen af Mengers Si. Prøv først at vurdere dimensionen af Mengers Si.

F=3, S=4, $4 = 3^d, d = 1.2618595071429 \approx 1{,}26$

Har I set den dimension tidligere? Ja, det er også dimensionen af Von Kochs fraktal. Ved Von Koch starter man med en streg der bliver "tykkere", her starter man med flade, der bliver "tyndere".

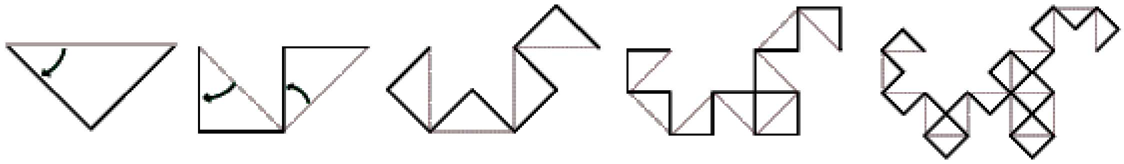
Opgave 25

Mengers Si kan man få frem med tilfældighed, på en måde der ligner den måde man fik Sierpinskis Si frem. Hvordan? Hvor mange punkter skal man starte med? Hvordan skal man bruge terningen? Skal man bruge en anden slags terning måske? Skal man gå halvvejs mellem der hvor man står og det hjørne som terningen viser? Eller hvor langt skal man gå?

Start med fire prikker i hvert hjørne af et kvadrat. Brug en 4-sidet terning, eller en 6-sidet hvor man bare ikke bruger siderne 5 og 6. Gå to tredjedel af vejen fra der hvor man står og mod det hjørne terningen viser.

Opgave 26

Dragekurven er endnu en fraktal. Man starter med et linjestykke. Ved hver iteration erstatter man linjestykkerne (første gang er der kun et linjestykke) med to linjestykker der danner en ret vinkel. Når der kommer flere linjestykker skal den rette vinkel skiftevis placeres til højre og til venstre for det oprindelige linjestykke (som om man går fremad langs den oprindelige kurve og hele tiden erstatter det linjestykke man lige har trådt på med en ret vinkel hhv. til højre og til venstre)



Find dimensionen af Dragekurven. Det vil sige find F, S og til sidst d. Vær opmærksom på at F ikke er et helt tal. Prøv først at vurdere dimensionen af Dragekurven.

F= $\sqrt{2}$, S=2, $2=(\sqrt{2})^d$, $d = 2$

Man kan lave noget der ligner Dragekurven ved at folde en strimmel papir. Man tager en lang strimmel papir fx 1 cm x 30 cm og folder midt på ved at folde højre side ind mod venstre side. Dette gør man så det antal iterationer som man ønsker, og så folder man det ud igen og prøver at få det til at ligge i rette vinkler. Det ligner Dragekurven, men der er en væsentlig forskel, nemlig længden. I den rigtige dragekurve bliver den samlede længde større ved hver iteration, ved papirudgaven har den hele tiden samme længde.

Uendelighed

En fraktal er den figur der opstår efter uendelig mange iterationer – og er dermed noget vi ikke kan tegne eller lave, da vi i den virkelige verden altid må stoppe efter et antal iterationer.

Men i den matematiske verden eksisterer uendelighed. Hilberts Hotel er en historie om matematisk uendelighed. Der findes flere slags uendelighed. Hilberts Hotel handler kun om den slags uendelighed, der kaldes tællelig uendelighed. Men det er en helt anden historie.

Læs historien om Hilberts Hotel op:

Hilberts Hotel er et meget stort hotel, det rummer uendeligt mange værelser. Der arbejder en ung receptionist på hotellet, og han regner med en rolig aften på arbejde, da alle værelser er optaget. Han sætter sig til rette med en god bog og forventer fred og ro natten igennem. Men allerede fem minutter efter dukker der en ældre, forvirret og træt kvinde op ved skranken. Hun spørger, om der er et ledigt værelse. "Desværre er alt optaget", svarer den unge mand. Han får dog så ondt af kvinden, at han siger:

”Lad mig se, hvad jeg kan gøre”. Receptionisten kan ikke sende kvinden hen til det sidste værelse – for der er jo ikke et sidste værelse, når der er uendeligt mange værelser. Han finder på noget andet. Over højtaleren beder han alle gæster flytte til det værelse, der har et nummer højere end det, man bor i. For eksempel skal den, der bor i værelse nr. 1, flytte til nr. 2, nr. 36 flytter til nr. 37, og nr. 12.345 flytter til nr. 12.346. Værelse nr. 1 bliver dermed ledigt, og kvinden kan flytte ind. Vi har altså et uendeligt stort hotel, som er fyldt op, idet der er uendeligt mange gæster, som bor der. Og alligevel er der plads til en ekstra gæst, hvorefter hotellet stadig er fyldt. Med andre ord kan man sige at $\infty + 1 = \infty$

Receptionisten kunne have fundet plads til flere gæster. Hvis han skulle have plads til 10 gæster mere, skulle alle gæster blot flytte til 10 værelsesnumre fremad.

Senere kommer der flere gæster til hotellet. Der kommer en bus fuld af gæster. Og det er en ganske særlig bus. Den har nemlig uendeligt mange passagerer med, og de vil alle have et værelse. Receptionisten kan ikke bruge samme trick som før og bede alle gæster om et flytte til et værelsesnummer uendeligt meget større end deres nuværende. Det nummer findes jo ikke. Han beder derfor alle gæster om at flytte til det værelse, som har et nummer, der er det dobbelte af det værelsesnummer, gæsten kom fra. Så gæsten på værelse nr. 1 flytter til nr. 2, fra nr. 33 flyttes til nr. 66 osv. Nu bliver de uendeligt mange ulige numre ledige, og derind kan de uendeligt mange nye gæster flytte ind. Hotellet er igen fyldt. Med andre ord kan man sige at $\infty + \infty = \infty$. Uanset om man fordobler eller halverer uendelig, har man stadig uendelig.

Receptionisten er stolt af sig selv og drømmer ikke om, at der kan dukke værre opgaver op. Men der er et stort møde om uendelighed i byen. Man har glemt at reservere hotelværelser til deltagerne, så nu holder der uendeligt mange busser uden for Hilberts Hotel med uendeligt mange passagerer i hver. Dét er en vanskelig nød at knække, men receptionisten er dygtig til matematik. Han ved, at der findes uendeligt mange primtal, dvs. tal som kun 1 og tallet selv går op i: For eksempel 2, 3, 5, 7 og 11. Han giver alle busser og sæder i hver bus numre. Først skal han skaffe uendeligt mange ledige værelser. Det er nemt nok. Han beder blot alle gæster om at flytte til det værelse, som har et nummer, der er det dobbelte af det værelsesnummer, de kom fra. Så finder han værelser til de uendeligt mange passagerer i den første bus. Han tager det første primtal, som er større end 2. Det er 3. Passager nr. 1 får værelse nr. 3^1, altså 3. Passager nr. 2 får værelse nr. 3^2, altså $3 \cdot 3$, dvs. 9. Passager nr. 3 får nr. 3^3 ($= 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$) osv. Det næste primtal er 5. Passagererne i den anden bus skal derfor have følgende værelser: Nr. 1 får 5^1 (5), nr. 2 får 5^2 (25), nr. 3 får 5^3 (125) osv. Passagererne i den tredje bus får følgende værelsesnumre, idet det næste primtal i rækken er 7: Nr. 1 får 7^1, nr. 2 får 7^2 (49), nr. 3 får 7^3 (343) osv. Receptionisten kan på denne måde fordele uendeligt mange passagerer fra hver af de uendeligt mange busser. Alle får et værelse, og der er kun én gæst på hvert værelse. Med andre ord kan man sige at $\infty \cdot \infty = \infty$

Opgave 25
Forestil dig, at Hilberts Hotel var fyldt, og der kom to busser med uendeligt mange passagerer. Hvad skal receptionisten gøre for at skaffe plads til alle de ekstra gæster på én gang? Hotellet skal være fyldt, når gæsterne har fået deres værelser. Hvilke værelser skal hotelgæsterne flytte hen i, og hvilke værelser får buspassagererne? Gæsterne skal flytte således, værelse n flytter til værelse 3n.
Første bus, sæde n til 3*(n-1)+1, Anden bus, sæde n til 3*(n-1)+2

Opgave 26
I en børnesang synger man: ”Ti små cyklister kom til en cykelsti, en kørte udenfor, og så var der ni.” Forestil dig, at der var uendeligt mange cyklister og ikke kun ti. Hvordan ville de to linjer i sangen så lyde?

”Uendelig mange små cyklister kom til en cykelsti, en kørte udenfor, og så var der uendelig mange.”